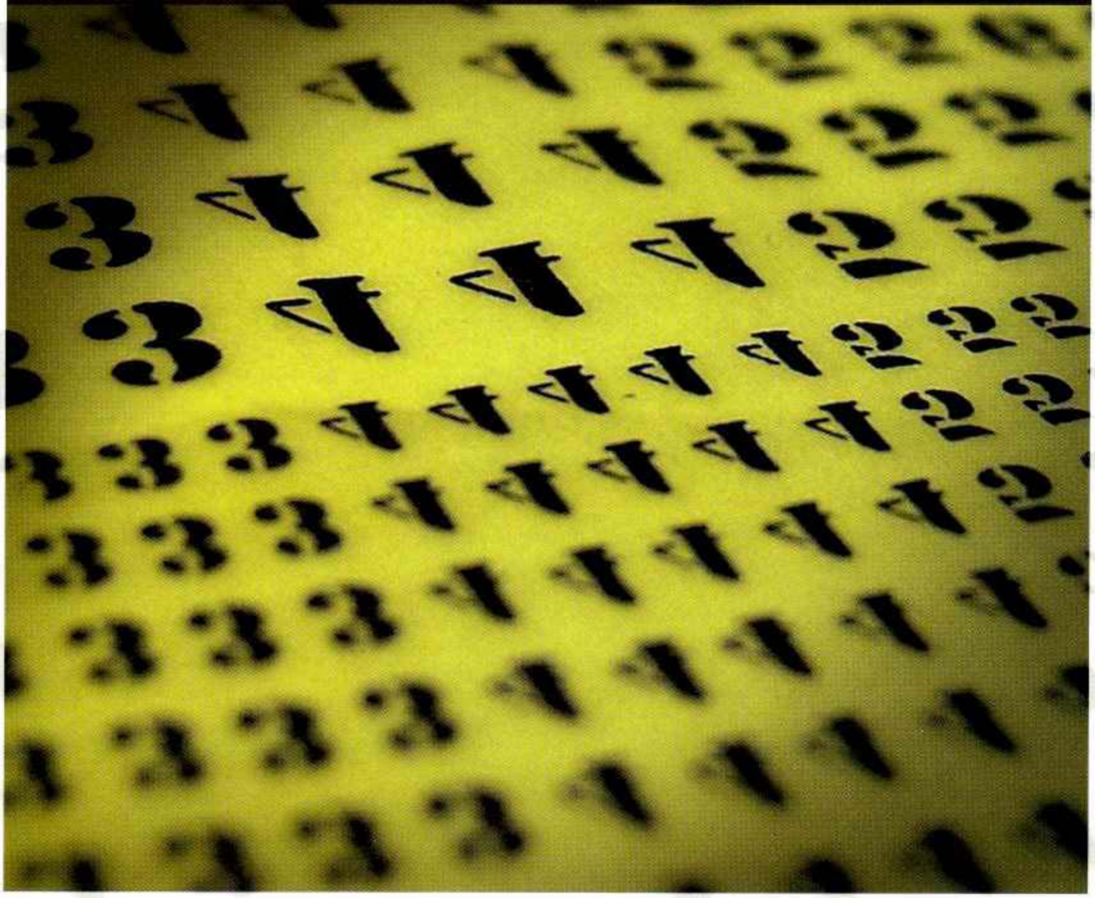
ÁLGEBRA LINEAL
PARA ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Emilio Prieto Sáez · Alberto A. Álvarez López



UNED

sanz y torres

ÁLGEBRA LINEAL

para Administración y Dirección de Empresas

Emilio Prieto Sáez

Catedrático de Universidad
Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales UNED

Alberto A. Álvarez López

Profesor Titular de Universidad
Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales UNED

UNED

sanz y torres

Índice

PRESENTACIÓN

En los capítulos que comprende este texto se exponen los instrumentos matemáticos básicos del Álgebra Lineal, así como una introducción a las sucesiones de números reales.

A quién va dirigido este texto Este manual está dirigido, principalmente, a los estudiantes de la asignatura de *Matemáticas I* del Grado de Administración y Dirección de Empresas en la UNED. Está escrito pensando en estudiantes *a distancia*, los cuales deben tener a mano la información más completa posible sobre la asignatura. Pero, precisamente por este motivo, pensamos que podría ser útil también para estudiantes presenciales que necesiten algún libro en el que consultar estos temas.

Contextualización de la asignatura en la materia En el plan de estudios actual, la asignatura de *Matemáticas I*, que es la primera de la materia de Matemáticas en el Grado de ADE, se estudia en el primer cuatrimestre de primer curso. Habrá dos asignaturas más: la siguiente —*Matemáticas II*— en el primer cuatrimestre de segundo curso, y la tercera y última —*Matemáticas III*— en el primer cuatrimestre de tercer curso.

En lo que a contenidos se refiere, la asignatura de *Matemáticas I* es una presentación de los conceptos y las técnicas básicos del Álgebra Lineal, y una introducción a las sucesiones de números reales. Las siguientes asignaturas estarán dedicadas a presentar contenidos de Análisis Matemático, con funciones de una y varias variables, incluyendo integración, y de otros temas como los Sistemas Dinámicos. Los contenidos de *Matemáticas I* son, pues, necesarios para el estudio de las restantes asignaturas de Matemáticas, aunque también encuentran aplicación directa en otras materias del Grado.

Estructura del texto El texto tiene cinco capítulos, y se completa con dos apéndices. Los cuatro primeros capítulos son los propiamente dedicados al Álgebra Lineal: espacios vectoriales, aplicaciones lineales, matrices y sistemas de ecuaciones lineales; el quinto, presenta las sucesiones de números reales. En cuanto a los apéndices, el primero recoge varios temas de carácter preliminar: conjuntos, aplicaciones, operaciones y polinomios, de los cuales el lector debería tener un conocimiento al menos introductorio. El segundo apéndice presenta los determinantes, de los cuales no se hace uso para estudiar sistemas de ecuaciones lineales.

Requisitos previos Los contenidos de Matemáticas habituales de un Bachillerato (con orientación a ciencias, ingeniería, o ciencias sociales) son más que suficientes para poder abordar esta asignatura. También son perfectamente adecuados los contenidos de la asignatura de *Matemáticas*[1] del Curso de Acceso Directo a la Universidad, para Mayores de 25 Años, que imparte la propia UNED.

Cómo leer este texto Cada uno de los cinco capítulos empieza con una amplia introducción. Recomendamos al lector leerla con detalle, pues presenta, de manera menos formal que el texto principal, los contenidos básicos del capítulo que introduce, a la vez que enfatiza lo más importante, insiste en lo más difícil, y da idea del alcance de exigencia de la materia.

Tras la introducción, el cuerpo principal del capítulo incluye todas las definiciones y resultados exigidos, acompañados unas y otros de ejemplos de distinta dificultad para ilustrar su uso y aplicación. A lo largo de este cuerpo principal, se incluyen ejercicios propuestos, cuya resolución se presenta al final del capítulo. Estos ejercicios son de dos tipos: algunos, los menos, buscan que el lector se ejercite en alguna técnica; otros, los más, proponen al lector la demostración de algún resultado adicional. Del primer tipo son menos porque ese cometido se deja a los ejercicios y problemas del texto corespondiente;[2] los segundos, por su parte, se pueden considerar, a modo de Actividades Complementarias, para ampliar formación.

Finalmente, cada capítulo termina con una recapitulación de todo lo visto en su desarrollo, tanto definiciones como resultados. Estas recapitulaciones pueden ser muy útiles como "fichas" de consulta rápida y referencia.

Sobre los autores Los autores, los profesores Emilio PRIETO SÁEZ y Alberto A. ÁLVAREZ LÓPEZ, llevan trabajando muchos años en asignaturas de la materia de Matemáticas para la Economía y la Administración y Dirección de Empresas, con la metodología a distancia, y son autores, tanto por separado como en colaboración, de varios manuales sobre estos temas.

Agradecimientos Los autores queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a los tutores y compañeros de los equipos docentes de las asignaturas del

[1] Hasta el curso 2008-2009, esta asignatura se llamaba *Matemáticas Especiales*

[2] Cf. *Problemas Resueltos*.

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II de la UNED, por sus sugerencias, así como a los alumnos, con cuyas preguntas y comentarios a lo largo de los años hemos podido hacernos idea de sus dificultades y de aquellos aspectos en los que debemos intentar mejorar.

Un reconocimiento especial merecen nuestros compañeros —y amigos— Mónica BUENDÍA CAPELLÁ, Javier SANZ PÉREZ y Tomás PRIETO RUMEAU, a los cuales nunca dejaremos de agradecer todas sus observaciones, comentarios, y conversaciones sobre la materia de este texto. Muchos de los aciertos que pueda tener son suyos; los errores, que quedarán varios, son de nuestra exclusiva responsabilidad.

LOS AUTORES
Madrid, junio de 2010

CAPÍTULO I

ESPACIOS VECTORIALES

ESQUEMA - RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Definición de espacio vectorial El lector se encontrará al inicio de esta sección con la definición general de espacio vectorial sobre un cuerpo. Un ejemplo sencillo de espacio vectorial sobre un cuerpo lo constituye el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los *pares ordenados* de números reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Los elementos de este conjunto son de la forma: (a, b), con a y b números reales. Por ejemplo:

$$(1, -3) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right) \in \mathbb{R}^2, \quad 4 \notin \mathbb{R}^2.$$

Sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ se define una operación, la *adición*, de esta manera:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

(para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$). Por ejemplo:

$$(1, 3) + (-1, 1/2) = \big(1 + (-1), 3 + (1/2)\big) = (0, 7/2).$$

Esta operación satisface las siguientes propiedades:

- es *asociativa*, es decir, cualesquiera que sean los pares ordenados de números reales (a, b), (c, d) y (e, f), se verifica:

$$(a, b) + \big[(c, d) + (e, f)\big] = \big[(a, b) + (c, d)\big] + (e, f);$$

- posee *elemento neutro*: el par $(0, 0)$, lo cual significa que la suma de cualquier par ordenado (a, b) con $(0, 0)$ da como resultado el mismo par (a, b), esto es: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$;
- es *simetrizable*: cualquiera que sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe un elemento de $\mathbb{R}^2$, precisamente $(-a, -b)$ —del que se dice es el *opuesto* de (a, b)—, que sumado a (a, b) da como resultado el elemento neutro: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$;
- es *conmutativa*: cualesquiera que sean $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, se tiene: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$.

La comprobación de estas propiedades es inmediata. Por verificarlas, se dice que la adición articula el conjunto $\mathbb{R}^2$ como *grupo abeliano*.[1]

Por otra parte, también se define una operación externa sobre $\mathbb{R}^2$ para el cuerpo $\mathbb{R}$, de esta manera:

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

(para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Por ejemplo:

$$3(2, -4) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-4)) = (6, -12), \quad -2\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) = (-1, -2\sqrt{2}).$$

Esta operación externa satisface las siguientes propiedades:

[1] Pueden consultarse más detalles sobre operaciones, y en particular sobre grupos, en el apéndice A.

- es *asociativa en los elementos de* $\mathbb{R}$: cualesquiera que sean los números reales λ y μ y el par ordenado de números reales (a,b), se verifica:

$$\lambda(\mu(a,b)) = (\lambda\mu)(a,b);$$

- es *distributiva respecto de la adición de números reales*: para cada número real λ y cada número real μ, y cada par ordenado de números reales (a,b), se tiene: $(\lambda+\mu)(a,b) = \lambda(a,b)+\mu(a,b)$;
- es *distributiva respecto de la adición de vectores*: para cada λ de $\mathbb{R}$, y para cada (a,b) y cada (c,d) de $\mathbb{R}^2$, se verifica:

$$\lambda((a,b)+(c,d)) = \lambda(a,b)+\lambda(c,d);$$

- es *neutra para el número real* 1: para cada $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$1(a,b) = (a,b).$$

También es inmediata la comprobación de estas cuatro propiedades. Afirmar que el conjunto $\mathbb{R}^2$, dotado de la adición y de la operación externa recién definida, es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ significa afirmar precisamente que, dotado de la adición, es un grupo abeliano, y que la operación externa satisface las cuatro propiedades anteriores.

En lo sucesivo, cuando nos refiramos a $\mathbb{R}^2$ estaremos pensando en el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En este contexto, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ los denominaremos *vectores*; a los de $\mathbb{R}$, *escalares*.

También consideramos el conjunto $\mathbb{R}^3$ de las *ternas* ordenadas de números reales, cuyos elementos son de la forma: (a,b,c), con a, b y c números reales; por ejemplo:

$$(1,2,0)\in\mathbb{R}^3, \quad (-2,-1,\pi)\in\mathbb{R}^3, \quad (2,-3)\notin\mathbb{R}^3.$$

Asimismo, consideramos el conjunto $\mathbb{R}^4$ de las *cuaternas* ordenadas de números reales: (a,b,c,d), con a, b, c y d números reales; y el conjunto $\mathbb{R}^5$ de las *quíntuplas*; y, en general, el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las *n-uplas* de números reales ($n \geqslant 1$). Observemos cómo son los elementos de $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n), \quad \text{con } x_1,x_2,\dots,x_n \text{ números reales.}$$

Sobre el conjunto $\mathbb{R}^n$ (para cualquier $n \geqslant 1$, lo cual engloba en particular los nombrados $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$), se define, *mutatis mutandis*, una adición y una operación externa para el cuerpo $\mathbb{R}$ como lo hemos hecho sobre $\mathbb{R}^2$, y se comprueba que estas operaciones articulan $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. A partir de ahora, siempre que tratemos el conjunto $\mathbb{R}^n$ estaremos automáticamente pensando en el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y llamaremos vectores a sus elementos y escalares a los elementos de $\mathbb{R}$, como comentamos para el caso de $\mathbb{R}^2$.

Queremos observar que, aunque el texto trata los espacios vectoriales en general, la experiencia nos muestra que, al menos en lo que se refiere al nivel exigible a un estudiante de ADE, el manejo prácticamente exclusivo de los $\mathbb{R}^n$ es más que suficiente para comprender los conceptos y las propiedades más importantes de los espacios vectoriales.[2] Además, en ningún caso manejaremos —para espacios vectoriales— un cuerpo que no sea $\mathbb{R}$.

Finalmente, queremos enfatizar al lector la definición de *componente* de un vector: si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, diremos que su primera componente es α_1; que su segunda componente es α_2, etc.; en general, diremos que su i-ésima componente es α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Por ejemplo, para el vector $(1, -3, 7, 0)$ de $\mathbb{R}^4$, la primera componente es igual a 1, la segunda igual a -3, la tercera igual a 7, y la cuarta igual a 0.[3]

Subespacios vectoriales Como los únicos espacios vectoriales que realmente nos interesan en este curso son los del tipo $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, veamos cómo se formula el concepto de subespacio vectorial aplicado sólo a ellos. Un subconjunto F, no vacío, de $\mathbb{R}^n$ es *subespacio vectorial* del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ si se satisfacen dos propiedades (que en el texto se designan (SV1) y (SV2)):

(SV1) la suma de vectores de F es un vector también de F; es decir, para cada vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y cada vector $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ pertenecientes a F, pertenece a su vez a F el vector siguiente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)\\ &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n);\end{aligned}$$

(SV2) el producto de cualquier escalar (esto es, de cualquier número real) por un vector de F es un vector también de F; o lo que es lo mismo: para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in F$, pertenece a su vez a F el vector:

$$\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n).$$

Es importante señalar que si F es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces F es en sí mismo un espacio vectorial con la adición de vectores y la multiplicación de números reales por vectores.[4]

[2] Por este motivo no se hacen preguntas, en las pruebas presenciales, sobre espacios vectoriales de otro tipo.

[3] El motivo de enfatizar esta sencilla definición es la posibilidad (que efectivamente se da con mucha frecuencia) de que el alumno confunda componente con *coordenada*, concepto que surgirá más adelante.

[4] Técnicamente, con la *restricción* de estas operaciones a F.

Podemos estudiar si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es subespacio vectorial o no de otra forma, haciendo uso de la caracterización enunciada en la proposición I.1 (cf. p. 39). Ésta, para el caso de $\mathbb{R}^n$, tiene este aspecto: un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$, no vacío, es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ precisamente si cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de F, y los escalares α y β, pertenece a F el vector:

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} &= \alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \beta(w_1, w_2, \ldots, w_n)\\ &= (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \ldots, \alpha v_n + \beta w_n).\end{aligned}$$

Además de la caracterización anterior, vemos otras propiedades de los subespacios vectoriales. Es de destacar que el vector $\mathbf{0}$ es un elemento de cualquier subespacio vectorial; recuérdese que, en el caso de los $\mathbb{R}^n$, el vector $\mathbf{0}$ es el vector $(0, 0, \ldots, 0)$ (con n ceros). Otra propiedad muy importante es que la intersección de subespacios vectoriales es a su vez un subespacio vectorial.

El estudio de subespacios vectoriales particulares se inicia con los de $\mathbb{R}^2$. Además de $\{(0,0)\}$ y del propio $\mathbb{R}^2$, se muestra que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ todo conjunto de esta forma:

$$\mathbb{R}(a,b) = \{\lambda(a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde (a,b) es un par ordenado de números reales. Por ejemplo:

$$\mathbb{R}(1,3) = \{\lambda(1,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que cada vector de este conjunto $\mathbb{R}(1,3)$ —conjunto que es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, como decimos— es de esta forma: $(\lambda, 3\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos decir que $(\lambda, 3\lambda)$ es un *vector genérico* del subespacio vectorial $\mathbb{R}(1,3)$. Nótese también que, a la vista de este vector genérico $(\lambda, 3\lambda)$, podemos afirmar que los vectores de este subespacio vectorial son los que satisfacen que su segunda componente es el triple de la primera.[5] Así: $(2,6)$, $(-4,-12)$ o $(1/3,1)$ son vectores de $\mathbb{R}(1,3)$; pero no lo son $(1,4)$, $(0,1)$ o $(1/2,2)$.

Otro ejemplo: $\mathbb{R}(2,-5) = \{(2\lambda, -5\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Un vector genérico de este otro subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ es $(2\lambda, -5\lambda)$, lo que puede interpretarse así: los vectores de este subespacio vectorial son aquellos cuya segunda componente es igual a la primera multiplicada por $-5/2$. Los pares ordenados $(1, -5/2)$, $(-4, 10)$ o $(2/3, -5/3)$ pertenecen al subespacio vectorial; no así los pares $(1,0)$, $(5, -\sqrt{3})$ o $(1,-1)$.

Otra forma de presentar un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ es con una *ecuación* (una ecuación lineal, para ser más exactos). Por ejemplo, el conjunto siguiente es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - x_2 = 0\}.$$

[5] O también: son aquellos vectores cuya primera componente es igual a un tercio de la segunda.

Sus elementos son los vectores (x_1, x_2) cuyas componentes, x_1 y x_2, satisfacen la ecuación $3x_1 - x_2 = 0$. Verbigracia, $(4, 12)$ es un elemento de F, pues: $3 \cdot 4 - 12 = 0$. Notemos que la ecuación $3x_1 - x_2 = 0$ es equivalente a esta otra: $x_2 = 3x_1$, lo que nos permite afirmar: los elementos de F son los vectores cuya segunda componente es igual al triple de la primera. Es decir, los elementos de F y los del conjunto $\mathbb{R}(1,3)$ son los mismos; ambos subespacios vectoriales son iguales.

En el texto comprobamos un resultado que generaliza el caso particular anterior: cuando el vector (a, b) no es el $(0,0)$ (o lo que es lo mismo: a y b no son simultáneamente nulos), se tiene:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = 0\} = \mathbb{R}(-b, a).$$

Otro ejemplo: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -5x_1 - 2x_2 = 0\} = \mathbb{R}(2, -5)$. Obsérvese que si (a, b) fuera el vector nulo (es decir, si $(a, b) = (0,0)$), entonces $\mathbb{R}(a, b)$ se reduce al conjunto $\{(0,0)\}$; en símbolos: $\mathbb{R}(0,0) = \{(0,0)\}$.

Nota Es importante señalar que la ecuación que define un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ debe ser de la forma $ax_1 + bx_2 = 0$ (con a y b números reales). En particular, cualquiera de la forma $ax_1 + bx_2 = d$, con d un número real *distinto* de 0, no define un subespacio vectorial. Por ejemplo, el conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + 2x_2 = -2\}$ *no* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.[6] ▲

A continuación pasamos a estudiar subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Los conjuntos $\{(0,0,0)\}$ y $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, y también lo son los conjuntos de este tipo:

$$\mathbb{R}(a, b, c) = \{\lambda(a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde (a, b, c) es una terna de números reales. Asimismo, los conjuntos definidos por una ecuación, análogos al subconjunto F de $\mathbb{R}^2$ que consideramos antes, son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ este conjunto:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\},$$

formado por los vectores (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ tales que $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. (O bien tales que: $x_2 = 2x_1 + 3x_3$, lo que se puede expresar con palabras así: los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que su segunda componente es igual al doble de la primera más el triple de la tercera.)

La prueba de que los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ anteriores son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ es, *mutatis mutandis*, como la del caso de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, debemos hacer notar que no se verifica para $\mathbb{R}^3$ ningún resultado de igualdad entre subespacios

[6] Sí es, y lo veremos más adelante en este mismo capítulo, un *subespacio afín*.

vectoriales definidos por una ecuación y subespacios vectoriales del tipo $\mathbb{R}(a,b,c)$, como ocurre para $\mathbb{R}^2$.

Queremos llamar la atención, por ser especialmente ilustrativo, del ejemplo 10 (cf. p. 42). Se trabaja con estos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$
$$F_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_3\},$$

y se demuestra que su intersección es igual al subespacio vectorial $\mathbb{R}(4,3,2)$. Notemos que esta intersección puede escribirse así:

$$F_1 \cap F_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_1 = 2x_3\},$$

es decir, como un subespacio vectorial definido por *dos* ecuaciones.[7]

Finalmente, generalizamos lo visto a cualquier $\mathbb{R}^n$. Enfatizamos aquí, en particular, que es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ cualquiera de la forma:

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales. *No* sería subespacio vectorial este conjunto si la ecuación fuera $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d$ con $d \neq 0$.

Suma de subespacios vectoriales Comienza esta sección definiendo la *suma* de subconjuntos de un espacio vectorial. Si A y B son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (no olvidemos que en todo momento particularizamos a $\mathbb{R}^n$), su *suma* es el conjunto cuyos elementos son vectores obtenidos como suma de un vector de A y otro de B. Esta definición se generaliza fácilmente a más de dos conjuntos. El ejemplo 11 (cf. p. 44), de suma de dos conjuntos, y el ejemplo 12 (cf. p. 45), de suma de tres, son suficientemente ilustrativos.

El resultado más importante de esta sección es que la suma de subespacios vectoriales es a su vez un subespacio vectorial. El ejemplo 13 (cf. p. 45) es importante; en él se muestra esta igualdad de subespacios vectoriales:

$$\mathbb{R}(1,0,0) + \mathbb{R}(0,0,1) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\},$$

en la que vemos, en particular, cómo un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por una ecuación se puede expresar como suma de subespacios vectoriales del tipo $\mathbb{R}(a,b,c)$. En general, cuando trabajamos con subespacios vectoriales, de lo que se trata es de

[7] Más adelante, tras estudiar sistemas de ecuaciones lineales en el capítulo IV, veremos cómo relacionar subespacios vectoriales definidos por ecuaciones con subespacios vectoriales del tipo $\mathbb{R}(a,b,c)$, y no sólo para $\mathbb{R}^3$, sino para cualquier $\mathbb{R}^n$.

relacionar subespacios determinados por una ecuación o por varias (éstos últimos son intersección de los determinados por una sola ecuación) con la suma de subespacios del tipo $\mathbb{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Hasta el capítulo IV, cuando tratemos los sistemas de ecuaciones lineales, no tendremos herramientas suficientes para resolver completamente este problema; por ahora, nos debemos conformar con estudiar algunas situaciones particulares, como la del citado ejemplo 13 o las vistas en los ejercicios del manual *Problemas Resueltos*.

Otro concepto importante de la sección es el de *independencia* de subespacios vectoriales. Dos subespacios vectoriales (de $\mathbb{R}^n$) son independientes si todo vector de su suma se puede obtener de forma *única* como suma de un vector del primero y un vector del segundo. La proposición I.4 (cf. p. 48) muestra una manera sencilla de comprobar la independencia: que dos subespacios vectoriales sean independientes es equivalente a que su intersección se reduzca al conjunto $\{(0, 0, \ldots, 0)\}$.

En el ejemplo 17 (cf. p. 48), para los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$F_1 = \mathbb{R}(0, 1, 1) \quad \text{y} \quad F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + x_3\},$$

se prueba tienen un único vector en común: $(0, 0, 0)$, con lo que se está efectivamente demostrando que son independientes. Por otra parte, en el ejemplo 18 (cf. p. 49) se comprueba que la suma $F_1 + F_2$ es igual a $\mathbb{R}^3$. Esto significa: todo vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como suma de un vector de F_1 y un vector de F_2, y además esta descomposición del vector en suma de dos, uno de cada subespacio, es única.

También hablamos de *suma directa*, que no es más que la suma de subespacios vectoriales independientes. Por ejemplo, la suma de los subespacios vectoriales F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^3$ del párrafo anterior es suma directa; se denota: $F_1 \oplus F_2$. Y también se define el concepto de subespacios vectoriales *suplementarios*: son aquellos cuya suma directa es igual a todo el espacio vectorial. Los subespacios vectoriales F_1 y F_2 de los que venimos hablando son suplementarios: $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$.

Termina el apartado de independencia de subespacios vectoriales con la generalización (por otra parte inmediata) de la noción de independencia (y de suma directa) a más de dos subespacios vectoriales. Es de observar, sin embargo, que la caracterización vista de la independencia de dos subespacios vectoriales (intersección igual a $\{(0, 0, \ldots, 0)\}$) *no* admite una generalización inmediata a más de dos.

Lo último que vemos en esta sección es el importante concepto de combinación lineal. Afirmar que un vector $\boldsymbol{v}$ (de $\mathbb{R}^n$) es igual a una *combinación lineal* de los k vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_k$ (todos de $\mathbb{R}^n$) no es más que afirmar se verifica la igualdad $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k$ para algunos números reales α_1, α_2, …, α_k (a los que a veces nos referiremos como los *coeficientes* de la combinación lineal). Dicho más técnicamente: el vector $\boldsymbol{v}$ es igual a una combinación lineal de los k vectores $\boldsymbol{u}_1$,

$\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ si $\boldsymbol{v}$ es un elemento de la suma de subespacios vectoriales siguiente:

$$\mathbb{R}\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mathbb{R}\boldsymbol{u}_k.$$

Por ejemplo, el vector $(2,3)$ de $\mathbb{R}^2$ es igual a una combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$, pues se tiene:

$$(2,3) = a(1,1) + b(0,1) \quad \text{para } a = 2 \text{ y } b = 1;$$

los coeficientes de esta combinación lineal son $a = 2$ y $b = 1$. Otra forma de transmitir la misma idea: $(2,3) \in \mathbb{R}(1,1) + \mathbb{R}(0,1)$.

Nótese que, sean los que sean los vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_k$ de $\mathbb{R}^n$, el vector nulo: $(0,0,\ldots,0)$, es igual a una combinación lineal de ellos; no hace falta más que tomar todos los coeficientes iguales a 0:

$$(0,0,\ldots,0) = 0\boldsymbol{u}_1 + 0\boldsymbol{u}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_k.$$

Subespacios afines Un *subespacio afín* de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ obtenido como suma de un vector y un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{v}$ es un vector y F es un subespacio vectorial (ambos de $\mathbb{R}^n$), el subespacio afín obtenido como suma de ellos se denota: $\boldsymbol{v} + F$.[8]

Cuando sumamos un vector y el subespacio vectorial $\{(0,0,\ldots,0)\}$, obtenemos el conjunto cuyo único elemento es el vector. Cuando sumamos el vector $(0,0,\ldots,0)$ y un subespacio vectorial, obtenemos este mismo subespacio vectorial. Estos son los ejemplos más sencillos de subespacios afines: los conjuntos formados por un solo vector y los propios subespacios vectoriales.

Para obtener más subespacios afines, no tenemos más que sumar un vector a cada subespacio vectorial que conocemos, y fundamentalmente hemos visto dos tipos de subespacios vectoriales: los del tipo $\mathbb{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y los definidos por una ecuación.[9]

En el primer caso, obtenemos un subespacio afín de este tipo:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \mathbb{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Si el vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es no nulo, de este subespacio afín se dice es una *recta* de $\mathbb{R}^n$.[10] Por ejemplo, el conjunto $(1,1) + \mathbb{R}(2,3)$ es una recta de $\mathbb{R}^2$, y el conjunto $(0,1,-3) + \mathbb{R}(2,-10,0)$ es una recta de $\mathbb{R}^3$.

[8] De suyo, la notación debería ser $\{v\} + F$, pero abreviamos quitando las llaves.

[9] Estos tipos "básicos" son los que luego intersecamos o sumamos.

[10] Nótese que si el vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es no nulo, entonces el subespacio vectorial $\mathbb{R}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ no es igual al $\{(0,0,\ldots,0)\}$, y el subespacio afín anterior no se reduce al conjunto $\{(v_1, v_2, \ldots, v_n)\}$.

En el segundo caso, obtenemos un subespacio afín de este otro tipo:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Una consecuencia que se extrae del texto es que estos subespacios afines se pueden escribir de esta forma:

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d\}, \tag{1}$$

donde d es un número real. (El número d puede ser nulo o no; en el primer caso, estaríamos ante un subespacio afín que también es subespacio vectorial; en el segundo, ante un subespacio afín que no sería subespacio vectorial.) Cuando los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son simultáneamente nulos, de todo conjunto de la forma (1) se dice es un *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$.[11] Los hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ son, pues, subespacios afines determinados por una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d$ con los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no simultáneamente nulos.

A modo de muestra de lo dicho, en el ejemplo 33 (cf. p. 61) se prueba que el hiperplano determinado por la ecuación $x_1 - x_3 = 4$, es decir:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 4\},$$

verifica: $A = (4, 0, 0) + \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$.

El último concepto que se estudia en esta sección es el de *combinación afín*. Afirmar que un vector $\boldsymbol{v}$ es igual a una *combinación afín* de los k vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ significa afirmar se satisface la igualdad $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k$ para algunos números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ que suman 1; es decir:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1.$$

Por ejemplo, el hecho de que se verifique:

$$(1, -2, -1) = a(1, 0, -1) + b(1, 2, -1), \quad \text{para } a = 2 \text{ y } b = -1,$$

permite afirmar que el vector $(1, -2, -1)$ es igual a una combinación afín de los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, -1)$, pues $a + b = 1$.

Sistemas de vectores Un *sistema* de vectores de $\mathbb{R}^2$ es una colección finita ordenada de vectores de $\mathbb{R}^2$. Escribimos un sistema de vectores entre paréntesis, separando los vectores por comas. Por ejemplo, los cuatro siguientes son sistemas de vectores de $\mathbb{R}^2$:

$$((1,2), (-1,0)), \ ((0,0), (1,-1), (1,-1)), \ ((\sqrt{2}, 2)), \ ((-1,0), (1,2)).$$

[11] Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todos nulos, el subespacio afín resulta igual a $\mathbb{R}^n$, que no se considera un hiperplano.

El primero y el cuarto son sistemas en los que figuran dos vectores; se dice que su *cardinal* es igual a 2. El segundo sistema tiene cardinal igual a 3 (se considera que en definitiva figuran tres vectores, a pesar de que hay uno repetido); y el tercero, cardinal igual a 1. Es de observar que el primer sistema y el cuarto tienen los mismos vectores, pero no en el mismo orden; se consideran sistemas distintos.

Consideraremos también sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$, que se definen de manera análoga; por ejemplo: $((1,-2,2),(0,-1,0))$ o $((1,0,0),(1,-1,-23),(1,-1,0))$. Y alguna vez también sistemas de vectores de $\mathbb{R}^4$, como $((0,-1,-2,1),(1,-2,5,0))$ o $((0,1,0,0),(0,1,-1,-3),(-1/2,-1,0,1/3))$.

Vectores linealmente dependientes Dados unos vectores de $\mathbb{R}^2$, sabemos que es posible expresar el vector $(0,0)$ como combinación lineal de ellos: al menos con todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a 0. Si es posible expresar el vector $(0,0)$ como combinación lineal de los vectores dados de forma que alguno de los coeficientes de la combinación lineal sea distinto de 0, se dice que los vectores son *linealmente dependientes.*

A modo de ejemplo, consideremos los vectores $(1,-1)$ y $(2,-2)$ de $\mathbb{R}^2$. Toda combinación lineal de ellos es de la forma: $\alpha(1,-1)+\beta(2,-2)$, con α y β números reales; ¿alguna de estas combinaciones lineales es igual al vector $(0,0)$ y es tal que uno de los dos coeficientes, α o β (o ambos), es no nulo? Sí; por ejemplo, para $\alpha=2$ y $\beta=-1$ se obtiene:

$$\alpha(1,-1)+\beta(2,-2)=2(1,-1)-(2,-2)=(0,0),$$

lo que permite responder afirmativamente la pregunta recién formulada. Los vectores $(1,-1)$ y $(2,-2)$ son entonces linealmente dependientes. También expresaremos esto afirmando que el sistema $((1,-1),(2,-2))$ es un sistema *ligado.*

La definición se extiende con facilidad a vectores de $\mathbb{R}^3$ (y de $\mathbb{R}^4$). Por ejemplo, los vectores $(1,-1,0)$ y $(-2,2,0)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, pues podemos escribir:

$$(1,-1,0)+\frac{1}{2}(-2,2,0)=(0,0,0),$$

que es una combinación lineal de ellos igualada al vector $(0,0,0)$ y con alguno de los coeficientes (en este caso, ambos) distinto de 0.

Saber si unos vectores dados son linealmente dependientes o no, o lo que es lo mismo: saber si el sistema que forman es ligado o no, es fácil cuando se trata de uno o de dos vectores. Un sistema formado por un único vector es ligado si el vector es nulo (es decir, si es igual a $(0,0)$ en el caso de $\mathbb{R}^2$, o a $(0,0,0)$ en el caso de $\mathbb{R}^3$), y no es ligado si el vector es otro cualquiera. Por ejemplo, el sistema $((1,-8))$ de $\mathbb{R}^2$ no es ligado, y sí lo es $((0,0))$, que es de hecho el único sistema ligado de $\mathbb{R}^2$ con un único vector.

Para un sistema formado por dos vectores, no es mucho más difícil: si ambos vectores son *proporcionales*, el sistema es ligado, y no es ligado en caso contrario. ¿Qué significa que los dos vectores sean proporcionales? Que uno de los vectores es igual a un número multiplicado por el otro. Por ejemplo, los vectores $(2,-4)$ y $(1,-2)$ son proporcionales, porque el primero puede obtenerse del segundo multiplicando por un número, en este caso 2: $(2,-4) = 2(1,-2)$; el sistema que ambos forman: $\big((2,-4),(1,-2)\big)$, es entonces ligado.

Otro ejemplo: los vectores $(1,0,3)$ y $(-2,1,1)$ no son proporcionales. ¿Cómo podemos verlo? Si fueran proporcionales, deberíamos ser capaces de obtener uno de los vectores multiplicando el otro por algún número; un simple vistazo nos muestra que ello es imposible: no hay forma de multiplicar por un mismo número los números 1, 0 y 3 para obtener, respectivamente, -2, 1 y 1, y viceversa: no hay forma de multiplicar por un mismo número los números -2, 1 y 1 para obtener, respectivamente, 1, 0 y 3. Estos vectores *no* son, pues, linealmente dependientes; el sistema que forman *no* es ligado.

Si tenemos tres o más vectores, se puede proceder como se hace en el ejercicio 2 (cf. p. 66), o se puede calcular el *rango* de los vectores e interpretar adecuadamente el resultado. Para los sistemas de vectores que manejaremos, este segundo método es en general el más sencillo, y por tanto el más recomendable; en la sección 10 de este mismo capítulo lo aprenderemos.

Vectores linealmente independientes Unos vectores dados son *linealmente independientes* si no son linealmente dependientes. También se dice: un sistema de vectores es *libre* si no es ligado. En concreto, que unos vectores sean linealmente independientes, o que un sistema de vectores sea libre, significa entonces lo siguiente: la única combinación lineal de esos vectores que es igual al vector nulo es aquella en la que todos los coeficientes son iguales a 0.

De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior, podemos afirmar lo siguiente:

- El sistema formado por el vector nulo es ligado, y cualquier otro sistema formado por un único vector es libre.
- Un sistema formado por dos vectores es ligado o es libre según sean los vectores proporcionales o no, respectivamente. Por ejemplo, los vectores $(1,0,3)$ y $(-2,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ no son proporcionales (lo vimos en el apartado anterior), luego son linealmente independientes; el sistema que forman es libre.
- Para un sistema formado por tres o más vectores, podemos calcular su rango e interpretar el resultado (método ya apuntado antes al ver la dependencia lineal, y que veremos más adelante).

Sistemas de generadores y bases de un espacio vectorial Un sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$ es un *sistema de generadores* del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ si todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores del sistema. También se dice, más simplemente, que los vectores del sistema *generan* $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo, el sistema de vectores $((1,1),(0,1))$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. ¿Qué significa? Que todo vector de $\mathbb{R}^2$ es igual a alguna combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$. Por ejemplo:

$$(1,2) = (1,1) + (0,1), \quad (0,0) = 0(1,1) + 0(0,1),$$
$$\text{o} \quad (-1,-2) = -(1,1) - (0,1),$$

y un vector genérico (a,b) de $\mathbb{R}^2$ verifica: $(a,b) = a(1,1) + (b-a)(0,1)$, igualdad que lo expresa efectivamente como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$.

Cuando un sistema de generadores es, además, un sistema libre, recibe el nombre de *base*. Una base de $\mathbb{R}^2$ es, pues, un sistema cuyos vectores son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$. El sistema del ejemplo del párrafo anterior: $((1,1),(0,1))$, es una base de $\mathbb{R}^2$: sus dos vectores generan $\mathbb{R}^2$, y como no son proporcionales, también son linealmente independientes. Todo vector de $\mathbb{R}^2$ es entonces igual a alguna combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$, ya lo hemos dicho, pero hay algo más al tratarse de una base: esa combinación lineal es única. Por ejemplo: $(-1,1) = -(1,1) + 2(0,1)$, y no hay otra manera de escribir $(-1,1)$ como una combinación lineal de $(1,1)$ y $(0,1)$; es decir, los coeficientes de una combinación lineal de estos dos vectores que sea igual al vector $(-1,1)$ han de ser necesariamente -1 y 2. Se dice que -1 y 2 (en este orden) son las *coordenadas* del vector $(-1,1)$ en la base $((1,1),(0,1))$.

Nota bene No deben confundirse las coordenadas de un vector (en una base) con las componentes del vector. ▲

Estos conceptos se extienden con facilidad a $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el sistema de vectores $((1,0,0),(1,1,0),(0,0,1))$ resulta ser una base de $\mathbb{R}^3$. Esto significa que cada vector de $\mathbb{R}^3$ es igual a una única combinación lineal de los vectores $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$; los coeficientes de esta única combinación lineal son las coordenadas del vector en la base. Para el vector $(1,1,3)$, por ejemplo, se tiene la igualdad: $(1,1,3) = 0(1,0,0) + 1(1,1,0) + 3(0,0,1)$, y no hay otra forma de escribirlo como combinación lineal de los tres vectores; los números 0, 1 y 3 (en este orden) son las coordenadas del vector $(1,1,3)$ en la base $((1,0,0),(1,1,0),(0,0,1))$.

Queremos enfatizar algo importante: el orden en el que se citan las coordenadas de un vector en una base es fundamental: se cita como primera coordenada el coeficiente del primer vector de la base, como segunda el coeficiente del segundo vector, y así sucesivamente. Así, por ejemplo, el vector de coordenadas -1 y 2 en la base $((1,1),(0,1))$ es el $(-1,1)$, como ya hemos visto, pero el de coordenadas 2 y -1 es: $2(1,1)-(0,1)=(2,1)$, que es otro vector distinto.

No hemos dicho nada en las líneas anteriores sobre algún método práctico que permita averiguar si un sistema de vectores es de generadores, o incluso si es una base. En general, el método más sencillo es el cálculo de su rango, que estudiaremos en la sección 10. Por otro lado, cuando ya sabemos que cierto sistema dado es una base y queremos averiguar concretamente las coordenadas en esta base de cierto vector, encontrarlas requiere en general resolver algún sistema de ecuaciones lineales; los estudiaremos en el capítulo IV.

No queremos dejar de reseñar aquí lo que es la *base canónica* de $\mathbb{R}^2$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La de $\mathbb{R}^2$ está formada por dos vectores: $((1,0),(0,1))$; y la de $\mathbb{R}^3$ por tres vectores: $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Es interesante observar que las coordenadas de un vector en la base canónica son precisamente las componentes del vector. Por ejemplo, las coordenadas del vector $(2,5)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son 2 y 5, exactamente sus componentes, pues: $(2,5)=2(1,0)+5(0,1)$. En el texto (cf. p. 74), puede encontrar el lector la generalización a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, en esta sección se incluye el denominado *teorema de la base incompleta*. Este teorema es un resultado técnico, que se aplica en ciertas demostraciones teóricas. Aquí sólo nos interesa resaltar una consecuencia muy importante. En $\mathbb{R}^2$, todos los sistemas de vectores que son base tienen la misma cantidad de vectores, precisamente dos. Para $\mathbb{R}^3$ la consecuencia es análoga: todas las bases de $\mathbb{R}^3$ tienen el mismo número de vectores, tres en este caso. Y también acontece que todas las bases de $\mathbb{R}^4$ tienen la misma cantidad de vectores: cuatro. La generalización de esta consecuencia a cualquier $\mathbb{R}^n$ es que todas las bases de $\mathbb{R}^n$ tienen n vectores.

Dimensión de un espacio vectorial Como acabamos de decir, todas las bases de $\mathbb{R}^2$ tienen la misma cantidad de vectores; esta cantidad de vectores de cualquiera de las bases de $\mathbb{R}^2$ se denomina *dimensión* del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es, pues, un espacio vectorial de dimensión igual a 2.

La definición de dimensión se extiende análogamente a $\mathbb{R}^3$, y a todos los $\mathbb{R}^n$. Así, el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión igual a 3, $\mathbb{R}^4$ dimensión igual a 4, y $\mathbb{R}^n$ dimensión igual a n.

Instamos al alumno a leer detenidamente las consecuencias de la definición de dimensión, por ser muy útiles para trabajar los ejemplos prácticos. Destacamos aquí una de ellas: cuando tenemos un sistema de vectores (de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo) de cardinal igual a la dimensión (es decir, con tantos vectores como marca la dimensión), para saber si es o no base no es necesario comprobar que se trata de un sistema de generadores y también comprobar que se trata de un sistema libre: en cuanto es una de las dos cosas, automáticamente también es la otra. Por ejemplo, los dos vectores $(1,-2)$ y $(5,-9)$ de $\mathbb{R}^2$ forman un sistema libre (pues no son proporcionales); como son tantos vectores como marca la dimensión de $\mathbb{R}^2$ (ya que son exactamente dos), automáticamente son también generadores de $\mathbb{R}^2$, y el sistema que forman es una base de $\mathbb{R}^2$.

Y otra consecuencia más: no es posible tener una cantidad de vectores linealmente independientes mayor que la dimensión. Así, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ todo sistema de tres o más vectores es ligado, y en $\mathbb{R}^3$ todo sistema de cuatro o más vectores es ligado.

También se aplica le definición de dimensión a los subespacios vectoriales de un espacio vectorial.[12] Hay una propiedad en la que se relaciona la dimensión de un espacio vectorial con la de sus subespacios vectoriales. Enunciada esta propiedad particularizada para $\mathbb{R}^2$, reza así: la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es mayor o igual que la de cualquiera de sus subespacios vectoriales, y el único subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ que tiene dimensión igual a 2 es el mismo $\mathbb{R}^2$. Como consecuencia, cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión igual a 1, excepto el mismo $\mathbb{R}^2$, que la tiene igual a 2, y excepto el que tiene como único vector el vector nulo: $\{(0,0)\}$, cuya dimensión se define como igual a 0.[13] La extensión a $\mathbb{R}^3$ (y a cualquier $\mathbb{R}^n$) es análoga: todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión igual a 1 o a 2, excepto el propio $\mathbb{R}^3$ (dimensión igual a 3) y el $\{(0,0,0)\}$ (dimensión igual a 0).

Rango de un sistema de vectores El *rango* de un sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$ se define como la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ que generan. Y análoga definición tiene el rango de un sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ o de cualquier $\mathbb{R}^n$. En el texto podemos encontrar una lista exhaustiva de propiedades, todas obtenidas de forma más o menos sencilla a partir de esta definición. Una de ellas es esta: el rango de un sistema es menor o igual que la cantidad de sus vectores (dos vectores, por ejemplo, no pueden generar un subespacio vectorial de dimensión mayor que 2), y el rango también es menor o igual que la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los vectores (si los vectores son, por ejemplo, de $\mathbb{R}^3$, no hay forma de que generen un subespacio vectorial de dimensión mayor que 3).

Otra propiedad, que es necesario destacar, establece que el rango de un sistema de vectores coincide con el máximo número de vectores linealmente independientes que hay entre ellos. Como consecuencia de esta propiedad, si uno de los vectores del

[12]Puesto que un subespacio vectorial es en sí mismo un espacio vectorial.

[13]No podemos aplicar al subespacio vectorial $\{(0,0)\}$ la definición dada de dimensión: número de vectores de cualquiera de sus bases, ya que es un espacio vectorial que no admite base (como no hay vectores no nulos, no hay vectores linealmente independientes). *Definimos* la dimensión de este espacio vectorial como igual a 0. Lo mismo acontece con el subespacio vectorial de cualquier $\mathbb{R}^n$ formado sólo por el vector nulo, como por ejemplo $\{(0,0,0)\}$: su dimensión se define igual a 0.

sistema es el vector nulo, al eliminarlo obtenemos un sistema con un vector menos pero con el mismo rango. Lo mismo acontece si eliminamos un vector que sea proporcional a algún otro del sistema: el nuevo sistema (con un vector menos) tiene el mismo rango. Por ejemplo, los tres siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo rango:

$$((1,2),(0,0),(-2,-4)), \quad ((1,2),(-2,-4)), \quad \text{y} \quad ((1,2)).$$

De forma más general, si un vector del sistema es igual a alguna combinación lineal de los restantes vectores, al eliminarlo el rango no varía. Por ejemplo, si en un sistema de tres vectores acontece que el primero es igual al doble del segundo menos el tercero, el rango no varía al quitar el primer vector; es decir, si $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, entonces los sistemas $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ y $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ tienen el mismo rango.

Hay una propiedad del rango que será muy útil cuando veamos más adelante, en este mismo epígrafe, un método práctico para su cálculo: el rango de un sistema de vectores no varía si sustituimos un vector del sistema por el resultado de sumarle una combinación lineal de los restantes. Por ejemplo, si en un sistema de tres vectores sumáramos al primero el doble del segundo más el cuádruple del tercero, obtendríamos un nuevo sistema con el mismo rango que el primero; es decir: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Finalmente, queremos recoger aquí una propiedad más. Cuando eliminamos un vector de un sistema, sabemos que el rango no varía si ese vector es igual a alguna combinación lineal de los demás. Pero, ¿qué ocurre si tal vector *no* es igual a una combinación lineal de los restantes vectores? Acontece que el sistema nuevo (con un vector menos) tiene por rango el del sistema original disminuido en 1. Por ejemplo, dados tres vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, si del tercero sabemos que no es igual a una combinación lineal de los otros dos, podemos escribir: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 1 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Esta última propiedad del rango es especialmente aplicable cuando los vectores (de $\mathbb{R}^n$) son tales que todos tienen una misma componente igual a 0, excepto uno, que la tiene distinta de 0. Por ejemplo, los vectores $(1,0)$, $(3,0)$ y $(0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ son así: los dos primeros tienen una misma componente nula: la segunda, y el tercero la tiene no nula. ¿Qué podemos afirmar de estos vectores? Que no hay forma de obtener el tercero de ellos como combinación lineal de los dos primeros.[14] Se tiene entonces: $\operatorname{rango}((1,0),(3,0),(0,-1)) = 1 + \operatorname{rango}((1,0),(3,0))$.

[14]Nótese que cualquier combinación lineal de los vectores $(1,0)$ y $(3,0)$ es un vector de la forma: $\alpha(1,0) + \beta(3,0) = (\alpha + 3\beta, 0)$ (para algunos números reales α y β), y el vector $(\alpha + 3\beta, 0)$ también tiene nula su segunda componente: de ninguna forma, pues, puede ser igual a $(0,-1)$. Al hacer combinaciones lineales de vectores que tienen nula una misma componente, se obtienen inevitablemente vectores que siguen teniendo nula esa componente.

Calcular el rango de un sistema de vectores dado no es difícil en la práctica, al menos para nuestro caso: vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, o acaso de $\mathbb{R}^4$. Cuando el sistema tiene un único vector, el rango es igual a 0 si ese único vector es el vector nulo: $(0,0)$ o $(0,0,0)$, y es igual a 1 si ese vector es cualquier otro. Por ejemplo: $\operatorname{rango}((1,2,4)) = 1$ y $\operatorname{rango}((0,0,0,0)) = 0$.

Cuando se trata de dos vectores, y descartado el caso trivial en que ambos fueran nulos (el rango sería igual a 0), se tiene que el rango es igual a 1 si ambos vectores son proporcionales, y es igual a 2 si no son proporcionales. (Recuérdese que el rango coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes. Si los dos vectores no son proporcionales, son linealmente independientes y tal número máximo es 2; si los vectores son proporcionales, son linealmente dependientes y tal número máximo es 1.) Por ejemplo: $\operatorname{rango}((1,2,0),(-1,-2,0)) = 1$, $\operatorname{rango}((-1,1),(7,-7)) = 1$ y $\operatorname{rango}((-1,1,2,1/2),(-1,-2,3/2,0)) = 2$.

Cuando el sistema tiene más de dos vectores, es posible reducir el problema a un sistema con un vector menos, haciendo uso de las propiedades que hemos visto. Si del sistema que nos dan quitamos un vector directamente, tenemos en general el problema de saber si es o no igual a una combinación lineal de los restantes: si lo es, el rango no varía por quitarlo; si no lo es, el rango disminuye en 1. Lo que se pretende entonces es "transformar" el sistema en otro nuevo, con el mismo número de vectores y con el mismo rango que el original, pero tal que sólo con verlo podamos asegurar de alguno de sus vectores que no es igual a una combinación lineal de los demás. Podemos buscar el nuevo sistema con la intención de que todos sus vectores tengan una misma componente igual a 0, excepto uno que la tenga no nula; si lo conseguimos, de este último vector podremos efectivamente decir que no es igual a una combinación lineal de los demás.

Consideremos, por ejemplo, el sistema $((1,2,-5),(2,-1,7),(-1,0,1))$, de vectores de $\mathbb{R}^3$. Buscamos, a partir de éste, otro sistema con el mismo número de vectores y con el mismo rango, pero tal que dos de sus vectores tengan nula, verbigracia, la primera componente, y el que queda la tenga no nula. Hacemos para ello uso de la propiedad según la cual el rango de un sistema no varía si sumamos a un vector una combinación lineal de los demás. En concreto, podemos conseguirlo conservando el primer vector: $(1,2,-5)$ (que tiene no nula su primera componente), y sumando a cada uno de los demás este primer vector multiplicado por algún número, de forma que el resultado de la operación sea un vector con la primera componente igual a 0. Sumamos al segundo vector el primero multiplicado por -2:

$$(2,-1,7) + (-2)(1,2,-5) = (2,-1,7) + (-2,-4,10) = (0,-5,17);$$

y sumamos al tercer vector el primero: $(-1,0,1) + (1,2,-5) = (0,2,-4)$. El nuevo sistema obtenido: $((1,2,-5),(0,-5,17),(0,2,-4))$, tiene el mismo rango que el sistema original, pero la construcción llevada a cabo hace que podamos asegurar del primer vector que no es igual a una combinación lineal de los restantes. Si "extraemos" este primer vector, reducimos el rango en 1:

$$\operatorname{rango}((1,2,-5),(0,-5,17),(0,2,-4)) = 1 + \operatorname{rango}((0,-5,17),(0,2,-4)).$$

Y ya tenemos reducido el problema a un sistema con un vector menos que el original. Este sistema con un vector menos es: $((0,-5,17),(0,2,-4))$, de dos vectores; tiene rango igual a 2 porque los dos vectores no son proporcionales. En resumen:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rango}((1,2,-5),(2,-1,7),(-1,0,1))\\ &\qquad = \operatorname{rango}((1,2,-5),(0,-5,17),(0,2,-4))\\ &\qquad = 1 + \operatorname{rango}((0,-5,17),(0,2,-4)) = 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

Finalmente, queremos comentar que, conocido el rango de unos vectores, podemos decir varias cosas de ellos. Por ejemplo:

- si el rango es igual al número de vectores, éstos son linealmente independientes; si es menor, los vectores son linealmente dependientes;
- si el rango es igual a la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen los vectores, se trata de un sistema de generadores; si es menor, no es un sistema de generadores;
- como consecuencia de los puntos anteriores, si el rango coincide simultáneamente con el número de vectores y con la dimensión, entonces el sistema es una base.

El sistema cuyo rango hemos calculado: $((1,2,-5),(2,-1,7),(-1,0,1))$, es una base de $\mathbb{R}^3$, pues su rango coincide con su cantidad de vectores (lo que establece que son linealmente independientes) y coincide con la dimensión del espacio vectorial (lo que establece que se trata de un sistema de generadores).

I.1 DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

1. Definición de espacio vectorial La definición general de espacio vectorial sobre un cuerpo es esta:

Espacio vectorial sobre un cuerpo

> Definición
>
> Dado un cuerpo conmutativo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, se llama **espacio vectorial sobre el cuerpo** $\mathbb{K}$ a todo conjunto E dotado de una ley de composición interna $+$ que lo articula como grupo abeliano, y sobre el que está definida una ley de composición externa $\bullet$ para $\mathbb{K}$ que es asociativa en los elementos de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la operación $+$ de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la operación $+$ de $\boldsymbol{E}$ y neutra para el elemento neutro de la operación $\cdot$ de $\mathbb{K}$.[15]
>
> A los elementos del conjunto $\boldsymbol{E}$ los llamaremos **vectores** de E; a los del cuerpo $\mathbb{K}$, **escalares**.

Notación Cuando consideremos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, representaremos los vectores con letras en negrita: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, ...; y los escalares con letras griegas: α, λ, ... El elemento neutro de la operación $+$ sobre E (*adición de vectores*) será denotado: $\boldsymbol{0}$; el de la operación $+$ sobre $\mathbb{K}$ (*adición de escalares*): 0, y el de la operación $\cdot$ (*multiplicación de escalares*): 1. También omitiremos los signos $\cdot$ y $\bullet$, de forma que el producto de escalares $\alpha \cdot \beta$ será denotado: $\alpha\beta$, y el vector $\alpha \bullet \boldsymbol{x}$ será denotado: $\alpha\boldsymbol{x}$.[16] ▲

Consecuencias de la definición de espacio vectorial Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. De acuerdo con lo exigido en la definición de espacio vectorial, la ley de composición externa de la definición verifica las siguientes propiedades (consúltese el cuadro de la página 413):

- $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$,
- $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ -\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$,
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \quad \text{o} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$

[15] Es decir, la ley de composición interna $+$ verifica las propiedades (G1), (G2), (G3) y (G4) enunciadas en la p. 406; y la ley de composición externa $\bullet$, las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4) enunciadas en la p. 409.

[16] Excepto por la omisión de los signos $\cdot$ y $\bullet$, estas notaciones son las que empleamos para las leyes de composición externas (cf. p. 409).

EJEMPLO 1 Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ al considerar como ley de composición externa la operación $\cdot$ del cuerpo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{K} \\ (\alpha, \boldsymbol{x}) & \dashrightarrow & \alpha \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}. \end{array}$$

En efecto: las propiedades exigidas en la definición de espacio vectorial son una consecuencia inmediata de las propiedades que verifica un cuerpo.

EJEMPLO 2 El conjunto $\mathbb{R}^n$ (con $n \geqslant 1$) es un grupo abeliano con la operación $+$ definida por:

$$\begin{array}{l} \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \end{array} \tag{2}$$

Y la ley de composición externa definida sobre $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \tag{3}$$

verifica las cuatro propiedades exigidas en la definición de espacio vectorial.

En definitiva, con las operaciones definidas en (2) y en (3), $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 3 Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, se puede generalizar el resultado del ejemplo anterior al conjunto $\mathbb{K}^n$: para la ley de composición interna $+$ dada por:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

(para $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$), y la ley de composición externa dada por:

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

(para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$), el conjunto $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 4 Si E y F son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, entonces podemos articular el conjunto F^E, de las aplicaciones de E en F, como un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Sean f y g dos aplicaciones de E en F. Si $\boldsymbol{x}$ es un vector arbitrario de E, entonces $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ y $f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$ son vectores de F. Definimos la *suma* de las aplicaciones f y g, que denotamos: $f + g$, como la aplicación de E en F que verifica:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ [f + g](\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}).$$

Es un ejercicio sencillo, que dejamos al lector, comprobar que la adición de aplicaciones así definida articula el conjunto F^E como grupo abeliano.

Notación El elemento neutro para la adición de aplicaciones se denota: O, y verifica:

$$\forall\, x \in E,\ O(x) = 0_F,$$

donde 0_F designa el elemento neutro de la adición de vectores de F. ▲

Análogamente, si α es un escalar y f es una aplicación de E en F, definimos la aplicación αf de E en F como la que verifica:

$$\forall\, x \in E,\ [\alpha f](x) = \alpha f(x).$$

Podemos, pues, considerar la ley de composición externa:

$$(\alpha, f) \in \mathbb{K} \times F^E \longmapsto \alpha f \in F^E,$$

la cual verifica ser, como el lector puede comprobar sin dificultad, asociativa en los elementos de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la adición en $\mathbb{K}$ y respecto de la adición en E, y neutra para el elemento 1 de $\mathbb{K}$.

En conclusión: con la adición y la ley de composición externa aquí definidas, F^E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

---

2. Componentes de un vector de $\mathbb{K}^n$ Siempre que consideremos $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{K}^n$, implícitamente estaremos suponiendo que son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{K}$, respectivamente, con las operaciones definidas en los ejemplos 2 y 3 anteriores (cf. p. 35). El primero: $\mathbb{R}^n$, lo manejaremos en todos los ejemplos; el segundo: $\mathbb{K}^n$, en muchas consideraciones teóricas. Recordamos que dos elementos $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de $\mathbb{K}^n$ son iguales:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

precisamente si:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \text{y}\ \alpha_n = \beta_n.$$

Es decir:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \iff \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = \beta_2, \\ \quad\vdots \\ \text{y}\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases}$$

Componentes de un vector de $\mathbb{K}^n$

> Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es un vector de $\mathbb{K}^n$, de α_1 diremos es su **primera componente**; de α_2, su **segunda componente**, etc; y, en general, de α_i, su **i-ésima componente** $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
>
> Por tanto, dos vectores de $\mathbb{K}^n$ son iguales precisamente si sus componentes correspondientes son iguales.

1.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

1. Definición de subespacio vectorial Mostramos la definición de subespacio vectorial, y a continuación damos un primer ejemplo.

Subespacio vectorial

> Definición
>
> Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. De un subconjunto *no vacío* F de E diremos es un **subespacio vectorial** de E si se verifica:
>
> *(SV1)* $\forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in F^2,\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in F,$
>
> *(SV2)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in F,\ \lambda \boldsymbol{v} \in F.$

Si F es un subespacio vectorial de E, de la definición —y en concreto del enunciado (SV1)— se deduce que la restricción al conjunto F de la adición de vectores de E es una operación sobre E:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in F \times F \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in F, \tag{4}$$

y fácilmente se comprueba que esta operación articula el conjunto F como grupo abeliano; y también se deduce —del enunciado (SV2)— que lo análogo acontece con la operación externa, es decir, es posible definir la operación externa sobre F para $\mathbb{K}$ siguiente:

$$(\lambda, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K} \times F \longmapsto \lambda \boldsymbol{v} \in F, \tag{5}$$

operación externa que evidentemente es asociativa en los elementos de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la adición en $\mathbb{K}$ y respecto de la adición en E, y neutra para el elemento 1 de $\mathbb{K}$. En consecuencia, el conjunto F con la operación (4) y la operación externa (5) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Podemos, pues, afirmar:

Todo subespcio vectorial es espacio vectorial

> Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es, a su vez, un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 5 El subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para justificarlo, analicemos en primer lugar qué significa que un vector de $\mathbb{R}^3$ pertenezca a F.

De la definición del conjunto F deducimos que una terna (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ pertenece a F precisamente si:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

En otras palabras, un vector de $\mathbb{R}^3$ pertenece a F precisamente si la suma de sus componentes primera y tercera es igual a 0.

Para probar que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ hay que probar en primer lugar que F no es el conjunto vacío, circunstancia que se verifica, pues, por ejemplo, $(0,0,0) \in F$.

En segundo lugar, veamos que se cumple (SV1). Sean $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\boldsymbol{w} = (y_1, y_2, y_3)$ dos vectores arbitrarios de F, y por tanto:

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \text{y} \quad y_1 + y_3 = 0. \tag{6}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

y $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ es un vector de F, pues la suma de sus componentes primera y tercera, como se deduce de (6), es nula:

$$(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_3) + (y_1 + y_3) = 0 + 0 = 0.$$

En consecuencia, se verifica (SV1).

Por último, probemos se cumple (SV2). Sea $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector arbitrario de F, y por tanto:

$$x_1 + x_3 = 0, \tag{7}$$

y sea λ un escalar arbitrario (en este ejemplo, un número real). Entonces:

$$\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Pero $\lambda\boldsymbol{v}$ es un vector de F, pues la suma de sus componentes primera y tercera es, de acuerdo con (7), nula:

$$\lambda x_1 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_3) = 0.$$

En consecuencia, se verifica (SV2).

En conclusión, F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Consecuencias de la definición de subespacio vectorial Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se verifica:

- *El conjunto $\{\boldsymbol{0}\}$ y el propio E son subespacios vectoriales de E.*

  En efecto: es obvio que, en ambos casos, se verifica (SV1) y se verifica (SV2).

- *Si $\boldsymbol{z}$ es un vector de E, el conjunto:*

  $$\mathbb{K}\boldsymbol{z} = \{\boldsymbol{x} \in E \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{z}\} = \{\alpha\boldsymbol{z} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

  es subespacio vectorial de E.

  En efecto. El conjunto $\mathbb{K}\boldsymbol{z}$ es no vacío; por ejemplo: $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}\boldsymbol{z}$. Por otro lado, si $\alpha\boldsymbol{z}$ y $\alpha'\boldsymbol{z}$ son dos vectores arbitrarios de $\mathbb{K}\boldsymbol{z}$, entonces:

  $$\alpha\boldsymbol{z} + \alpha'\boldsymbol{z} = (\alpha + \alpha')\boldsymbol{z},$$

  y $(\alpha + \alpha')\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}\boldsymbol{z}$. De esta forma, se verifica (SV1).

Por último, si αz es un vector arbitrario de $\mathbb{K}z$ y λ es un escalar arbitrario, entonces: $\lambda(\alpha z) = (\lambda\alpha)z$, y $(\lambda\alpha)z \in \mathbb{K}z$. También, pues, se verifica (SV2), y con ello $\mathbb{K}z$ es subespacio vectorial de E.

Obsérvese que si $z = 0$, entonces: $\mathbb{K}z = \mathbb{K}0 = \{0\}$.

- *Si F es un subespacio vectorial de E, entonces: $0 \in F$.*

  En efecto. Por ser F subespacio vectorial es no vacío, así que existirá algún vector x de E tal que: $x \in F$. De (SV2) se deduce: $(-1)x \in F$, y de (SV1) se concluye pertenece a F el vector: $x + (-1)x = 0$.

La siguiente proposición es una caracterización de los subespacios vectoriales.

CNS[17] de subespacio vectorial

Proposición I.1 *Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y F es un subconjunto no vacío de E, una condición necesaria y suficiente para que F sea subespacio vectorial de E es:*

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\ (v,w) \in F^2,\ \alpha v + \beta w \in F. \tag{8}$$

Demostración La condición es necesaria. Si F es subespacio vectorial, v y w son vectores arbitrarios de F, y α y β son escalares arbitrarios, entonces de (SV2) se deduce: $\alpha v \in F$ y $\beta w \in F$, y con (SV1) se concluye: $\alpha v + \beta w \in F$.

La condición es suficiente. Si v y w son vectores arbitrarios de F, de (8) se deduce pertenece a F el vector: $1v + 1w = v + w$, y por tanto se verifica (SV1). Y si v es un vector arbitrario de F y λ es un escalar arbitrario, de (8) se infiere pertenece a F el vector: $\lambda v + \beta 0 = \lambda v$, y por tanto se verifica (SV2). C.Q.D.

EJEMPLO 6 El subconjunto $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$, de $\mathbb{R}^3$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

En efecto: F no es el conjunto vacío, pues, por ejemplo, $(0,0,0) \in F$; y si $x = (x_1,x_2,x_3)$ y $y = (y_1,y_2,y_3)$ son dos vectores de F, es decir:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{y} \quad 2y_1 - y_2 + 2y_3 = 0, \tag{9}$$

y si α y β son dos escalares (en este ejemplo, números reales), entonces pertenece a F el vector: $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$, pues (de acuerdo con (9)):

$$2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + 2(\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(2x_1 - x_2 + 2x_3) + \beta(2y_1 - y_2 + 2y_3) = 0.$$

En conclusión, hemos probado:

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ (x,y) \in F^2,\ \alpha x + \beta y \in F,$$

y de acuerdo con la proposición I.1 (cf. p. 39), F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

---

[17] CNS: condición necesaria y suficiente.

2. Intersección de subespacios vectoriales La intersección de dos o más subespacios vectoriales es un subespacio vectorial; nos lo muestra la siguiente proposición.

Intersección de subespacios vectoriales

Proposición I.2 *Si F_1, F_2, ..., F_n son n subespacios vectoriales de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces su intersección:*

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n,$$

es un subespacio vectorial de E.

Demostración Designemos por F la intersección de $F_1, F_2, \ldots, F_n$. En primer lugar, observamos que F no es el conjunto vacío, pues el vector $\mathbf{0}$ pertenece a cada subespacio vectorial F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, y por tanto: $\mathbf{0} \in F$.

En segundo lugar, si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores de F, y α y β son escalares, entonces acontece que el vector $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ pertenece a F. En efecto: como F_1, F_2, ..., F_n son subespacios vectoriales, se tiene (cf. proposición I.1, p. 39):

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \; \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} \in F_i,$$

lo cual implica: $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} \in F$. En conclusión, se verifica:

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \; \forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in F^2, \; \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} \in F,$$

y F es subespacio vectorial de E. C.Q.D.

3. Ejemplos de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ De acuerdo con las consecuencias de la definición de subespacio vectorial, los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(0,0)\}, \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbb{R}(a,b) = \{\lambda(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 7 El subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}(1,2) = \{\lambda(1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Obsérvese que cada vector de $\mathbb{R}(1,2)$ es un vector de la forma:

$$(\lambda, 2\lambda) \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Y, recíprocamente, todo vector de esta forma, esto es: $(\lambda, 2\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, es un vector de $\mathbb{R}(1,2)$. Podríamos decir —con fines exclusivamente prácticos— que $(\lambda, 2\lambda)$ es un *vector genérico* del subespacio vectorial $\mathbb{R}(1,2)$.

EJERCICIO 1 *Si (a,b) es un vector de $\mathbb{R}^2$ y μ es un número real no nulo, demostrar se verifica:*

$$\mathbb{R}(\mu a, \mu b) = \mathbb{R}(a,b).$$

Generalizar este resultado. ▲

Si a y b son dos números reales, el subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = 0\}$$

también es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

En primer lugar, observamos que si $a = b = 0$, entonces $G = \mathbb{R}^2$, con lo que G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. En otro caso: si a y b no son simultáneamente nulos, se verifica:

$$G = \mathbb{R}(-b, a), \tag{10}$$

y por tanto G también es, en este caso, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. La igualdad (10) se puede justificar de la siguiente manera. Si suponemos que $a \neq 0$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in G &\iff x_1 = -\frac{b}{a}x_2 \\
&\iff (x_1, x_2) = x_2\left(-\frac{b}{a}, 1\right) \\
&\iff (x_1, x_2) \in \mathbb{R}\left(-\frac{b}{a}, 1\right), \\
&\iff (x_1, x_2) \in \mathbb{R}(-b, a),
\end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = 0\} = \mathbb{R}(-b, a).$$

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ (pues a y b no son simultáneamente nulos), y de forma similar se llegaría al mismo resultado.

EJEMPLO 8 El subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - x_2 = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Se verifica:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - x_2 = 0\} = \mathbb{R}(1, 3).$$

4. Ejemplos de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(0,0,0)\}, \quad \mathbb{R}^3,$$
$$\mathbb{R}(a,b,c) = \{\lambda(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 9 El subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}(1,2,-1) = \{\lambda(1,2,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Observemos que un vector genérico de $\mathbb{R}(1,2,-1)$ es $(\lambda, 2\lambda, -\lambda)$, en el mismo sentido en que $(\lambda, 2\lambda)$ lo es del subespacio vectorial $\mathbb{R}(1,2)$ de $\mathbb{R}^2$ (cf. ejemplo 7, p. 40).

Si a, b y c son números reales, razonando de forma análoga a como se hizo en el ejemplo 6 (cf. p. 39), se comprobaría que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\} \tag{11}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Nótese que si a, b y c son simultáneamente nulos, entonces este conjunto coincide con $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 10 Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_3\},$$

son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, y por tanto su intersección: $F_1 \cap F_2$, también es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (cf. proposición I.2, p. 40). Además, se verifica:

$$F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}(4,3,2). \tag{12}$$

Nota En el capítulo IV veremos un método que nos permitirá obtener el subespacio vectorial que es intersección de dos o más subespacios vectoriales dados. Por el momento, nos limitaremos en este ejemplo a comprobar se verifica (12). ▲

Un vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ pertenece a F_2 precisamente si: $a = 2c$. Todo vector de F_2 es, pues, un vector de la forma:

$$(2c, b, c) \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R} \text{ y algún } b \in \mathbb{R},$$

y todo vector de la forma anterior pertenece a F_2. Podemos decir que el vector $(2c, b, c)$ es un vector genérico del subespacio vectorial F_2.

Ahora, el vector $(2c, b, c)$ pertenece a F_1 (y por tanto a $F_1 \cap F_2$) precisamente si la suma de su primera componente, su segunda componente multiplicada por -2 y su tercera componente es igual a 0: $2c - 2b + c = 0$, o bien: $b = 3c/2$. Podemos, pues, afirmar que un vector pertenece a $F_1 \cap F_2$ precisamente si es de la forma:

$$\left(2c, \frac{3}{2}c, c\right) \text{ para algún } c \in \mathbb{R},$$

es decir:

$$\text{un vector genérico de } F_1 \cap F_2 \text{ es: } \left(2c, \frac{3}{2}c, c\right).$$

En conclusión:

$$F_1 \cap F_2 = \mathbb{R}\left(2, \frac{3}{2}, 1\right) = \mathbb{R}(4,3,2),$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el resultado del ejercicio 1 (cf. p. 41). Queda así probada la igualdad (12).

---

5. Ejemplos de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$\{(0,0,\dots,0)\}, \quad \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbb{R}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

Y generalizando la prueba de que el conjunto de (11) (cf. p. 42) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, se comprobaría que dados n números reales a_1, a_2, ..., a_n, el subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

I.3 SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

1. Suma de subconjuntos de un espacio vectorial Consideremos un espacio vectorial E, y sean A y B dos *subconjuntos* no vacíos de E. Se define la **suma** de A y B, que se denota: $A + B$, como el conjunto de los vectores de E que pueden obtenerse como suma de un vector de A y un vector de B. En símbolos:

$$A + B = \{\boldsymbol{z} \in E \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in A,\ \exists\, \boldsymbol{y} \in B,\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\}.$$

También escribiremos:

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A \text{ y } \boldsymbol{y} \in B\}.$$

EJEMPLO 11 Si $A = \{(1,1), (0,1)\}$ y $B = \{(-1,-1)\}$, entonces:

$$A + B = \{(0,0), (-1,0)\}.$$

Notación Si $\boldsymbol{x}$ es un vector del espacio vectorial E y A es un subconjunto no vacío de E, escribiremos: $\boldsymbol{x} + A$, en vez de: $\{\boldsymbol{x}\} + A$; es decir:

$$\boldsymbol{x} + A = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in A\}.$$

Del conjunto $\boldsymbol{x} + A$ diremos es la suma del vector $\boldsymbol{x}$ y el conjunto A (nótese que, de no haber hecho esta observación, deberíamos decir: "suma del conjunto formado por el único vector $\boldsymbol{x}$ y el conjunto A"). ▲

Consecuencias de la definición de suma de conjuntos Si A y B son dos subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial E, se verifica:

(S1) $\mathbf{0} + A = A$.

En efecto:

$$\mathbf{0} + A = \{\mathbf{0} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in A\} = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in A\} = A.$$

(S2) Si $\boldsymbol{x}$ es un vector de E, entonces:

$$\forall\, \boldsymbol{z} \in E,\ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{x} + A \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \in A.$$

En efecto, para cada $\boldsymbol{z} \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{x} + A &\iff \exists\, \boldsymbol{u} \in A,\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \\ &\iff \exists\, \boldsymbol{u} \in A,\ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \iff \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \in A. \end{aligned}$$

(S3) Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son vectores de E tales que: $\boldsymbol{x} + A = \boldsymbol{y} + B$, entonces:

$$\forall\, \boldsymbol{z} \in E,\ (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}) + A = (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + B.$$

Para demostrarlo, sea $\boldsymbol{z}$ un vector cualquiera de E. Un vector arbitrario de $(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}) + A$ es de la forma:

$$(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u} \quad \text{para algún } \boldsymbol{u} \in A.$$

Ahora bien, de la hipótesis: $\boldsymbol{x} + A = \boldsymbol{y} + B$, se tiene que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ (que pertenece a $\boldsymbol{x} + A$) es un vector de $\boldsymbol{y} + B$, con lo que:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}' \quad \text{para algún } \boldsymbol{u}' \in B.$$

Así: $(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}') = (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}'$, y $(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}' \in (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + B$, luego: $(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + B$. En conclusión: $(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}) + A \subseteq (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + B$.

La otra inclusión se obtiene, con el mismo razonamiento, partiendo de un vector arbitrario de $(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + B$.

La definición de suma de n ($n > 2$) subconjuntos de un espacio vectorial es una generalización de la anterior. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos del espacio vectorial E, se define la suma de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la forma siguiente:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{x}_1 \in A_1, \boldsymbol{x}_2 \in A_2, \ldots, \text{ y } \boldsymbol{x}_n \in A_n\}.$$

EJEMPLO 12 Reconsiderando los conjuntos A y B del ejemplo 11 (cf. p. 44), si $C = \{(0,0),(1,0)\}$, se verifica:

$$A + B + C = \{(0,0),(1,0),(-1,0)\}.$$

2. Suma de subespacios vectoriales de un espacio vectorial La suma de subconjuntos de un espacio vectorial tiene gran interés cuando éstos son subespacios vectoriales.

Suma de subespacios vectoriales

Proposición I.3 *Si F y G son subespacios vectoriales de un espacio vectorial E, entonces su suma: $F + G$, es un subespacio vectorial de E.*

Demostración Sean $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1$ (con $\boldsymbol{v}_1 \in F$ y $\boldsymbol{w}_1 \in G$) y $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2$ (con $\boldsymbol{v}_2 \in F$ y $\boldsymbol{w}_2 \in G$) dos vectores arbitrarios de $F + G$, y sean α y β dos escalares. Entonces podemos escribir: $\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1) + \beta(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2) = (\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) + (\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2)$; como F y G son subespacios vectoriales, se tiene: $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in F$ y $\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2 \in G$, luego:

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1) + \beta(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2) \in F + G.$$

En conclusión (cf. proposición I.1, p. 39): $F + G$ es subespacio vectorial. C.Q.D.

De forma similar se probaría que si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial E, entonces su suma: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, también es un subespacio vectorial de E.

EJEMPLO 13 Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \mathbb{R}(1,0,0) \quad \text{y} \quad F_2 = \mathbb{R}(0,0,1).$$

Se tiene que $F_1 + F_2$ es el subespacio vectorial:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}.$$

En efecto. Un elemento arbitrario de $F_1 + F_2$ es de la forma:

$$\lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1) \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y algún } \mu \in \mathbb{R};$$

pero: $\lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1) = (\lambda, 0, \mu)$, y $(\lambda, 0, \mu) \in F$ (pues su segunda componente es nula). En consecuencia: $F_1 + F_2 \subseteq F$.

Por otra parte, un vector arbitrario de F es de la forma:

$$(x_1, 0, x_3) \quad \text{para algún } x_1 \in \mathbb{R} \text{ y algún } x_3 \in \mathbb{R};$$

pero: $(x_1, 0, x_3) = x_1(1,0,0) + x_3(0,0,1)$, y $x_1(1,0,0) + x_3(0,0,1) \in F_1 + F_2$. En consecuencia: $F \subseteq F_1 + F_2$, y en definitiva: $F = F_1 + F_2$.

---

3. Subespacios vectoriales independientes Si F y G son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E y $\boldsymbol{z}$ es un vector de $F + G$, por definición de suma existen vectores $\boldsymbol{v} \in F$ y $\boldsymbol{w} \in G$ tales que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. Pero puede ocurrir que existan otros vectores $\boldsymbol{v}' \in F$ y $\boldsymbol{w}' \in G$ de modo que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}'$, con $\boldsymbol{v}' \neq \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}' \neq \boldsymbol{w}$. El siguiente ejemplo es una muestra de esta situación.

EJEMPLO 14 Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\},$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Por ejemplo, los vectores $(2, 1, -2)$ y $(3, 6, 0)$ pertenecen, respectivamente, a F_1 y a F_2 (como se comprueba inmediatamente), y su suma es:

$$(2, 1, -2) + (3, 6, 0) = (5, 7, -2);$$

pero el vector $(5, 7, -2)$ también puede obtenerse como suma del vector $(0, 1, 0)$, el cual pertenece a F_1, y el vector $(5, 6, -2)$, el cual pertenece a F_2. El vector $(5, 7, -2)$ puede obtenerse, al menos, de dos formas diferentes como suma de un vector de F_1 y un vector de F_2.

También puede ocurrir que un vector $\boldsymbol{z}$ de $F + G$ tenga una única descomposición como suma de un vector de F y un vector de G; esto es, que existan dos únicos vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, el primero de F y el segundo de G, tales que su suma sea igual a $\boldsymbol{z}$: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. El siguiente ejemplo nos lo muestra.

EJEMPLO 15 Si F_1 y F_2 son los subespacios vectoriales del ejemplo 13 (cf. p. 45), se tiene que el vector $(2, 0, 3)$ pertenece a $F_1 + F_2$, pues:

$$(2, 0, 3) = (2, 0, 0) + (0, 0, 3) \tag{13}$$

y $(2,0,0) \in F_1$ y $(0,0,3) \in F_2$. Además, la anterior es la única manera de obtener el vector $(2,0,3)$ como suma de uno de F_1 y otro de F_2.

En efecto: un vector genérico de F_1 es de la forma: $(\lambda,0,0)$; uno de F_2, de la forma: $(0,0,\mu)$, y si:

$$(2,0,3) = (\lambda,0,0) + (0,0,\mu), \tag{14}$$

es decir: $(2,0,3) = (\lambda,0,\mu)$, entonces necesariamente $\lambda = 2$ y $\mu = 3$, y la igualdad (14) se reduce a la (13).

De dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial se dice son **independientes** si todo vector de su suma se puede obtener de forma única como suma de un vector del primero y un vector del segundo. En otras palabras: dos subespacios vectoriales F y G de un espacio vectorial son independientes si de:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad \text{con } \boldsymbol{x} \in F,\ \boldsymbol{y} \in G, \\ \quad \text{y} \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}', \quad \text{con } \boldsymbol{x}' \in F,\ \boldsymbol{y}' \in G, \end{cases}$$

se deduce: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$.

EJEMPLO 16 Los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \mathbb{R}(0,1,1) \quad \text{y} \quad F_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + x_3\},$$

son subespacios vectoriales independientes.

Por el momento, nos limitamos sólo a una comprobación: tomemos, por ejemplo, los vectores $(0,2,2) \in F_1$ y $(3,1,2) \in F_2$, cuya suma es $(3,3,4)$, que por tanto es un vector de $F_1 + F_2$, y veamos que de la igualdad:

$$(3,3,4) = (0,x,x) + (y+z,y,z), \tag{15}$$

donde $(0,x,x)$ y $(y+z,y,z)$ son vectores genéricos de F_1 y de F_2, respectivamente, se deduce: $(0,x,x) = (0,2,2)$ y $(y+z,y,z) = (3,1,2)$.

De (15) se obtiene:

$$3 = 0 + y + z, \quad 3 = x + y \quad \text{y} \quad 4 = x + z,$$

que sólo admite como solución: $x = 2$, $y = 1$ y $z = 2$, y así $(0,x,x) = (0,2,2)$ y también $(y+z,y,z) = (3,1,2)$.

Sólo hay, pues, una forma de expresar el vector $(3,3,4)$ de $F_1 + F_2$ como suma de un vector de F_1 y un vector de F_2:

$$(3,3,4) = (0,2,2) + (3,1,2).$$

De todas formas, insistimos, no hemos demostrado que F_1 y F_2 sean independientes.

Una caracterización de la independencia de dos subespacios vectoriales la proporciona la siguiente

CNS de independencia de dos subespacios vectoriales

Proposición I.4 *Una condición necesaria y suficiente para que dos subespacios vectoriales F_1 y F_2 de un espacio vectorial sean independientes es:*

$$F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Demostración La condición es necesaria: si suponemos que F_1 y F_2 son independientes, y $\boldsymbol{v}$ es un vector de $F_1 \cap F_2$, entonces $\boldsymbol{v} \in F_1$ y $\boldsymbol{v} \in F_2$, y podemos escribir:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0}, & \text{con } \boldsymbol{v} \in F_1,\ \mathbf{0} \in F_2, \\ \quad \text{y} & \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}, & \text{con } \mathbf{0} \in F_1,\ \boldsymbol{v} \in F_2, \end{cases}$$

de lo que se deduce: $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dado que F_1 y F_2 son independientes (cf. definición, p. 47). En conclusión: si F_1 y F_2 son independientes, entonces $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$.

La condición es suficiente: si suponemos que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$, y $\boldsymbol{v} \in F_1 + F_2$, entonces de:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, & \text{con } \boldsymbol{v}_1 \in F_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in F_2, \\ \quad \text{y} & \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2', & \text{con } \boldsymbol{v}_1' \in F_1,\ \boldsymbol{v}_2' \in F_2, \end{cases} \tag{16}$$

se deduce (restando): $\mathbf{0} = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1') + (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2')$, de donde:

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2. \tag{17}$$

Ahora bien, como se tiene que $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' \in F_1$ y que $\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 \in F_2$, de (17) se deduce que también $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' \in F_2$ y $\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 \in F_1$, luego:

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' \in F_1 \cap F_2 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 \in F_1 \cap F_2,$$

y con la hipótesis: $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$, se infiere: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1'$ y $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2'$, y las dos descomposiciones de (16) son idénticas. Así, todo vector de $F_1 + F_2$ se puede expresar sólo de una forma como suma de un vector de F_1 y un vector de F_2, esto es, F_1 y F_2 son independientes. C.Q.D.

EJEMPLO 17 Ahora estamos en condiciones de probar son independientes los subespacios vectoriales F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^3$ vistos en el ejemplo 16 (cf. p. 47). De acuerdo con la proposición I.4, lo justificaremos si demostramos se verifica: $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$.

Un vector que pertenezca a F_1 es de la forma: $(0, x, x)$, y si pertenece, además, a F_2, su primera componente es igual a la suma de las otras dos:

$$0 = x + x,$$

y por tanto: $x = 0$. En consecuencia, sólo el vector $(0,0,0)$ pertenece simultáneamente a F_1 y a F_2: $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$. Los subespacios vectoriales F_1 y F_2 son, entonces, independientes.

Si F y G son dos subespacios vectoriales independientes de un espacio vectorial E, su suma: $F + G$, se denota de la forma:

$$F \oplus G,$$

y de $F \oplus G$ se dice es la **suma directa** de F y G. Si, además, se verifica:

$$E = F \oplus G,$$

de los subespacios vectoriales F y G de E se dice son **suplementarios**.

EJEMPLO 18 Los subespacios vectoriales F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^3$ vistos en el ejemplo 16 (cf. p. 47) son suplementarios.

En efecto. En el ejemplo 17 (cf. p. 48) ya vimos que F_1 y F_2 son independientes, con lo cual su suma es la suma directa $F_1 \oplus F_2$. Sólo resta, pues, comprobar que esta suma directa es igual al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Pero si (x_1, x_2, x_3) es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$, entonces (x_1, x_2, x_3) es igual a:

$$\left(0, \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}, \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}\right) + \left(x_1, \frac{x_2 - x_3 + x_1}{2}, \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}\right),$$

y además:

$$\left(0, \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}, \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}\right) \in F_1, \quad \left(x_1, \frac{x_2 - x_3 + x_1}{2}, \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}\right) \in F_2,$$

luego: $(x_1, x_2, x_3) \in F_1 \oplus F_2$. En consecuencia: $\mathbb{R}^3 \subseteq F_1 \oplus F_2$, y como obviamente se verifica: $F_1 \oplus F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, se concluye: $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$, es decir, los subespacios vectoriales F_1 y F_2 son suplementarios.

De forma análoga a como hemos hecho con dos subespacios vectoriales, se define la independencia de n ($n > 2$) subespacios vectoriales. De los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de un espacio vectorial E se dice son **independientes** si todo vector $\boldsymbol{u}$ de su suma: $\boldsymbol{u} \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, se puede escribir de forma única como suma de n vectores: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$, de manera que: $\boldsymbol{u}_1 \in F_1, \boldsymbol{u}_2 \in F_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in F_n$.

En otras palabras: los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son independientes si, para cada vector $\boldsymbol{u}$ de su suma, de:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n, & \text{con } \boldsymbol{u}_1 \in F_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in F_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n \in F_n, \\ \text{y} & \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n, & \text{con } \boldsymbol{v}_1 \in F_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in F_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n \in F_n, \end{cases}$$

se deduce: $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n$.

Finalmente, otra forma de expresar la independencia de los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ es la siguiente: cada vector $\boldsymbol{u}$ de su suma determina de forma unívoca (inequívoca) n vectores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ tales que:

$$\boldsymbol{u}_1 \in F_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in F_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n \in F_n,$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n.$$

Podría pensarse que la caracterización de la independencia de dos subespacios vectoriales dada en la proposición I.4 (cf. p. 48) es generalizable a más de dos subespacios; en particular, que si los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ fueran de intersección igual a $\{\boldsymbol{0}\}$, entonces serían independientes. Pero esto no se verifica, como comprobamos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 19 Es fácil comprobar que los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \mathbb{R}(1,0), \quad F_2 = \mathbb{R}(1,1) \quad \text{y} \quad F_3 = \mathbb{R}(0,1),$$

verifican: $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{(0,0)\}$. Sin embargo, estos tres subespacios vectoriales no son independientes: por ejemplo, el vector $(2,2)$ puede obtenerse de más de una forma como suma de tres vectores, uno de cada uno de los subespacios vectoriales F_1, F_2 y F_3:

$$(2,2) = (0,0) + (2,2) + (0,0) \quad \text{y} \quad (2,2) = (2,0) + (0,0) + (0,2).$$

No obstante, podemos utilizar de alguna forma la caracterización de la proposición I.4 (cf. p. 48) para estudiar la independencia de más de dos subespacios vectoriales. Comencemos con el caso particular de tres subespacios. Consideremos, pues, tres subespacios vectoriales F_1, F_2 y F_3 de un espacio vectorial E. Si se verifica:

$$F_1 \ \text{y} \ (F_2 + F_3) \ \text{son independientes},$$

$$F_2 \ \text{y} \ F_3 \ \text{son independientes},$$

entonces podemos afirmar que los tres subespacios F_1, F_2 y F_3 son independientes.

En efecto. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $F_1 + F_2 + F_3$, entonces:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \quad \text{para algún } \boldsymbol{u}_1 \in F_1, \text{ algún } \boldsymbol{u}_2 \in F_2 \text{ y algún } \boldsymbol{u}_3 \in F_3,$$

y los vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$ que verifican lo anterior son únicos; podemos escribir:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \quad \text{con } \boldsymbol{u}_1 \in F_1 \ \text{y} \ \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \in F_2 + F_3,$$

lo que establece que $\boldsymbol{u}$ pertenece a la suma de los subespacios F_1 y $(F_2 + F_3)$, y de suponer son éstos independientes obtenemos como consecuencia la unicidad de $\boldsymbol{u}_1$ y la de $\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$; también podemos escribir:

$$\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \in F_2 + F_3 \quad \text{con } \boldsymbol{u}_2 \in F_2 \text{ y } \boldsymbol{u}_3 \in F_3,$$

y de suponer la independencia de los subespacios F_2 y F_3 se deduce la unicidad de los vectores $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$. Los subespacios vectoriales F_1, F_2 y F_3 son, pues, independientes.

En general, si los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ verifican:

$$\begin{array}{rr}
[1]: & F_1 \text{ y } (F_2 + \cdots\cdots\cdots + F_n) \text{ son independientes,} \\
[2]: & F_2 \text{ y } (F_3 + \cdots + F_n) \text{ son independientes,} \\
\vdots & \vdots \\
[n-1]: & F_{n-1} \text{ y } F_n \text{ son independientes,}
\end{array}$$

entonces son independientes.

En efecto. Sea $\boldsymbol{u} \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$; entonces: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$ para algunos vectores $\boldsymbol{u}_1 \in F_1, \boldsymbol{u}_2 \in F_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in F_n$. Se tiene:

$$\boldsymbol{u} \in F_1 + (F_2 + \cdots + F_n),$$

y del enunciado [1] se deduce que $\boldsymbol{u}_1$ está inequívocamente determinado. También se verifica:

$$\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \cdots + \boldsymbol{u}_n \in F_2 + (F_3 + \cdots + F_n),$$

y del enunciado [2] se infiere que $\boldsymbol{u}_2$ queda también inequívocamente determinado. Así, sucesivamente, llegamos a:

$$\boldsymbol{u}_{n-1} + \boldsymbol{u}_n \in F_{n-1} + F_n,$$

y de $[n-1]$ se obtiene que $\boldsymbol{u}_{n-1}$ y $\boldsymbol{u}_n$ están inequívocamente determinados. En conclusión: si $\boldsymbol{u} \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ y se verifica: [1], [2], ..., $[n-1]$, entonces hay una única forma de escribir $\boldsymbol{u}$ como suma de n vectores, uno de cada uno de los subespacios vectoriales $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Es decir: $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son independientes.

EJEMPLO 20 Los cuatro siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$:

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\},$$

$$F_2 = \mathbb{R}(1,1,0,0,0), \quad F_3 = \mathbb{R}(0,1,1,0,0), \quad F_4 = \mathbb{R}(0,0,0,1,0),$$

son independientes.

Para demostrarlo, comprobemos en primer lugar que son independientes los subespacios vectoriales F_1 y $(F_2 + F_3 + F_4)$, para lo cual (cf. proposición I.4, p. 48) veamos se verifica:

$$F_1 \cap (F_2 + F_3 + F_4) = \{(0,0,0,0,0)\}.$$

Un vector genérico de F_1 es de la forma: (x,x,x,x,y). Si este vector pertenece, a su vez, a $(F_2 + F_3 + F_4)$, entonces:

$$(x,x,x,x,y) = (s,s,0,0,0) + (0,t,t,0,0) + (0,0,0,l,0) \tag{18}$$

para algunos números reales s, t y l. De (18) se deduce:

$$x = s, \quad x = s + t, \quad x = t, \quad x = l, \quad y = 0,$$

de donde: $x = s = t = l = y = 0$. En consecuencia, $F_1 \cap (F_2 + F_3 + F_4)$ es igual a $\{(0,0,0,0,0)\}$, y los subespacios F_1 y $(F_2 + F_3 + F_4)$ son efectivamente independientes.

En segundo lugar, comprobemos que F_2 y $(F_3 + F_4)$ son independientes, o lo que es lo mismo: $F_2 \cap (F_3 + F_4) = \{(0,0,0,0,0)\}$. Si el vector $(x,x,0,0,0)$, que es un vector genérico de F_2, pertenece a $(F_3 + F_4)$, entonces:

$$(x,x,0,0,0) = (0,s,s,0,0) + (0,0,0,l,0)$$

para algunos números reales s y l. Se obtiene:

$$x = 0, \quad x = s, \quad 0 = s, \quad 0 = l,$$

de donde: $x = s = l = 0$,. Por tanto: $F_2 \cap (F_3 + F_4) = \{(0,0,0,0,0)\}$, y F_2 y $(F_3 + F_4)$ son independientes.

Finalmente, veamos que F_3 y F_4 son independientes. Si $(0,x,x,0,0)$, vector genérico de F_3, pertenece a F_4, entonces:

$$(0,x,x,0,0) = (0,0,0,l,0) \quad \text{para algún } l \in \mathbb{R}.$$

Se obtiene: $x = 0$ y $l = 0$, y por tanto: $F_3 \cap F_4 = \{(0,0,0,0,0)\}$, y F_3 y F_4 son independientes.

Tomemos el vector $(0,2,-1,-2,1)$ —que admitiremos pertenece a la suma de F_1, F_2, F_3 y F_4—, y comprobemos quedan determinados unívocamente unos vectores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ y $\boldsymbol{u}_4$, petenecientes, respectivamente, a F_1, F_2, F_3 y F_4, tales que su suma es igual a $(0,2,-1,-2,1)$:

$$(0,2,-1,-2,1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4.$$

Si (x,x,x,x,y), $(s,s,0,0,0)$, $(0,t,t,0,0)$ y $(0,0,0,l,0)$ son vectores de F_1, F_2, F_3 y F_4, respectivamente, tales que:

$$(0,2,-1,-2,1) = (x,x,x,x,y) + (s,s,0,0,0) + (0,t,t,0,0) + (0,0,0,l,0),$$

entonces:

$$0 = x + s, \quad 2 = x + s + t, \quad -1 = x + t, \quad -2 = x + l, \quad 1 = y,$$

de donde:

$$t = 2, \quad x = -3, \quad s = 3, \quad l = 1 \quad \text{y} \quad y = 1.$$

En consecuencia, el vector $(0, 2, -1, -2, 1)$ queda descompuesto, unívocamente, como suma de los vectores:

$$\boldsymbol{u}_1 = (-3, -3, -3, -3, 1) \in F_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = (3, 3, 0, 0, 0) \in F_2,$$

$$\boldsymbol{u}_3 = (0, 2, 2, 0, 0) \in F_3 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{u}_4 = (0, 0, 0, 1, 0) \in F_4.$$

Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son subespacios vectoriales independientes de un espacio vectorial E, su suma: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, se denota:

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n,$$

y de $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ se dice es la **suma directa** de $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

EJEMPLO 21 Los cuatro subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ vistos en el ejemplo 20 (cf. p. 51) son independientes, como en este mismo ejemplo citado se demostraba, así que su suma es suma directa: $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4$.

4. Combinaciones lineales Afirmar que un vector es igual a una combinación lineal de otros significa lo siguiente:

Definición

Combinación

Dados n vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, de cada vector de la suma de los subespacios vectoriales $\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1, \mathbb{K}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \mathbb{K}\boldsymbol{v}_n$, es decir, de cada vector de:

$$\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_n,$$

se dice es una **combinación lineal** de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Un vector $\boldsymbol{z}$ de E es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ precisamente si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$\boldsymbol{z} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n.$$

Todo vector que es combinación lineal de vectores de un mismo subespacio vectorial pertenece, a su vez, al subespacio vectorial.

EJEMPLO 22 El vector $(3,0,-3)$ de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores:

$$(1,1,0),\ (0,1,1) \text{ y } (3,1,-2),$$

pues los escalares 0, -1 y 1 son tales que:

$$(3,0,-3) = 0(1,1,0) + (-1)(0,1,1) + 1(3,1,-2).$$

EJEMPLO 23 El siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\},$$

es el conjunto de las combinaciones lineales de los vectores:

$$(1,0,0) \text{ y } (0,0,1),$$

pues (cf. ejemplo 13, p. 45): $F = \mathbb{R}(1,0,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$.

I.4 SUBESPACIOS AFINES

1. Definición de subespacio afín Vemos en primer lugar la definición de subespacio afín de un espacio vectorial:

Subespacio afín

> Definición
>
> De un subconjunto no vacío de un espacio vectorial E se dice es un **subespacio afín** de E si puede obtenerse como suma de un vector de E y un subespacio vectorial de E.

En símbolos: el conjunto no vacío $A \subseteq E$ es subespacio afín de E si existen un vector $\boldsymbol{v} \in E$ y un subespacio vectorial F de E de forma que:

$$A = \boldsymbol{v} + F = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in F\}.$$

Nota En lo sucesivo, con la frase "$\boldsymbol{w} + G$ es un subespacio afín del espacio vectorial E", supondremos implícitamente que $\boldsymbol{w}$ es un vector de E y que G es un subespacio vectorial de E. ▲

EJEMPLO 24 El siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(1,1,1)\},$$

que obviamente es no vacío, es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$, pues:

$$A = \{(1,1,1)\} = (1,1,1) + \{(0,0,0)\}.$$

EJEMPLO 25 El subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ siguiente:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_2 + x_3 = 0\},$$

es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$, ya que, como comprobamos a continuación, A es igual al siguiente subespacio afín de $\mathbb{R}^3$:

$$S = (0,0,0) + \mathbb{R}(-1,1,-1).$$

Si (x_1, x_2, x_3) es un vector de A, es decir:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 + x_3 = 0,$$

entonces: $x_1 = -x_2$ y $x_3 = -x_2$. Podemos, pues, afirmar que todo vector de A es de la forma: $(-x_2, x_2, -x_2)$ para algún $x_2 \in \mathbb{R}$. Pero:

$$(-x_2, x_2, -x_2) = x_2(-1,1,-1) = (0,0,0) + x_2(-1,1,-1),$$

lo que establece que el vector $(-x_2, x_2, -x_2)$ pertenece a S. Así: $A \subseteq S$.

Recíprocamente, un vector de S es de la forma:

$$(0,0,0) + \lambda(-1,1,-1) \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R},$$

pero: $(0,0,0) + \lambda(-1,1,-1) = (-\lambda, \lambda, -\lambda)$, y se tiene: $(-\lambda, \lambda, -\lambda) \in A$, ya que: $(-\lambda) + (\lambda) = 0$ y $(\lambda) + (-\lambda) = 0$. En consecuencia: $S \subseteq A$. Y en definitiva: $A = S$, y A es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 26 El siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 4\},$$

que es no vacío (por ejemplo: $(4,0,0) \in A$), es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$, pues es igual al subespacio afín:

$$B = (4,0,0) + \mathbb{R}(1,0,1) + \mathbb{R}(0,1,0),$$

como comprobamos seguidamente.

Si (x_1, x_2, x_3) es un vector de A, ha de verificar: $x_1 - x_3 = 4$, con lo cual puede escribirse de la forma: $(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 4, x_2, x_3)$, y como:

$$(x_3 + 4, x_2, x_3) = (4,0,0) + x_3(1,0,1) + x_2(0,1,0),$$

se tiene: $(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 4, x_2, x_3) \in B$. En consecuencia: $A \subseteq B$.

Recíprocamente, todo vector de B es de la forma:

$$(4,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,0) = (4+\lambda, \mu, \lambda),$$

que es un vector que cumple la condición para pertenecer a A: $(4+\lambda) - (\lambda) = 4$. En consecuencia: $B \subseteq A$, y en conclusión: $A = B$.

Consecuencias de la definición de subespacio afín Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se verifica:

- *Un subconjunto de E formado por un único vector es un subespacio afín de E.*
  En efecto: si $A = \{\boldsymbol{v}\} \subseteq E$, entonces: $A = \boldsymbol{v} + \{\mathbf{0}\}$. Obsérvese que, en particular, el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio afín de E.
- *Todo subespacio vectorial de E es un subespacio afín de E.*
  Pues si F es un subespacio vectorial de E, se puede escribir: $F = \mathbf{0} + F$. Nótese que, en particular, el propio E es un subespacio afín de E.
- *Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos vectores de E, el conjunto:*

$$\boldsymbol{v} + \mathbb{K}\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{w} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

  es también un subespacio afín de E.
  Es una consecuencia inmediata de la definición. Nótese que si $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, el subespacio afín anterior se reduce a $\{\boldsymbol{v}\}$.

  Si $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$, del subespacio afín $\boldsymbol{v} + \mathbb{K}\boldsymbol{w}$ de E se dice es una **recta** del espacio vectorial E.

EJEMPLO 27 El subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ visto en el ejemplo 25 (cf. p. 55):

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_2 + x_3 = 0\},$$

es una recta de $\mathbb{R}^3$, ya que, como se demostró en el ejemplo citado, se tiene:

$$A = (0,0,0) + \mathbb{R}(-1,1,-1),$$

y $(-1,1,-1) \neq (0,0,0)$.

Proposición I.5 *Si $\boldsymbol{v} + F$ es un subespacio afín de un espacio vectorial E y $\boldsymbol{w}$ es un vector de E, entonces:*

$$(\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + F) \iff (\boldsymbol{w} + F = \boldsymbol{v} + F).$$

Demostración Demostramos en (S2) (cf. p. 44) la siguiente equivalencia:

$$(w \in v + F) \iff (w - v \in F);$$

pero al ser F un subespacio vectorial podemos escribir:

$$(w \in v + F) \iff (w - v \in F) \iff (v - w \in F).$$

Por otra parte, como el lector puede comprobar, se verifica:

$$(w \in v + F) \iff (w + F \subseteq v + F).$$

En consecuencia:

$$(w + F \subseteq v + F) \iff (w \in v + F) \iff (v - w \in F)$$
$$\iff (v \in w + F) \iff (v + F \subseteq w + F),$$

y en conclusión: $(w \in v + F) \iff (w + F = v + F)$. C.Q.D.

Como consecuencia de esta proposición se tiene la siguiente

CNS para que un subespacio afín sea subespacio vectorial

Proposición I.6 *Si $v + F$ es un subespacio afín de un espacio vectorial E, se verifica:*

$$\begin{pmatrix} v + F \text{ es} \\ \text{subespacio vectorial} \end{pmatrix} \iff (v + F = F) \iff (v \in F).$$

Demostración Por un lado, si $v + F$ es subespacio vectorial, entonces a él pertenece el vector 0, y de acuerdo con la proposición I.5 se tiene:

$$v + F = 0 + F = F.$$

El recíproco es obvio: si $v + F = F$, entonces $v + F$ es un subespacio vectorial. Queda así probada la primera equivalencia.

Por otro lado:

$$(v \in F) \iff (v \in 0 + F) \iff (v + F = 0 + F) \iff (v + F = F),$$

lo que termina de probar el resultado. C.Q.D.

Dado un subespacio afín A de un espacio vectorial E, es decir:

$$A = v + F \quad \text{con } v \in E \text{ y } F \text{ un subespacio vectorial de } E,$$

nos preguntamos si existe algún vector w de E, distinto de v, y algún subespacio vectorial G de E, distinto de F, de forma que:

$$A = v + F = w + G.$$

Una respuesta parcial nos la da la siguiente proposición.

Igualdad de subespacios afines

Proposición I.7 *Si $\boldsymbol{v} + F$ y $\boldsymbol{w} + G$ son el mismo subespacio afín de un espacio vectorial E: $\boldsymbol{v} + F = \boldsymbol{w} + G$, entonces los subespacios vectoriales F y G son iguales: $F = G$.*

Demostración De la hipótesis: $\boldsymbol{v} + F = \boldsymbol{w} + G$, y teniendo en cuenta (S3) (cf. p. 44), se deduce: $(\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})) + F = (\boldsymbol{w} + (-\boldsymbol{v})) + G$, de donde (cf. (S1), p. 44):

$$F = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) + G. \tag{19}$$

De esta forma, el subespacio afín $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) + G$ es un subespacio vectorial, y por tanto (cf. proposición I.6, p. 57): $G = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) + G$, que unido a la igualdad (19) permite finalmente concluir: $G = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) + G = F$. C.Q.D.

Nota bene Si $\boldsymbol{v} + F$ es un subespacio afín de un espacio vectorial E y $\boldsymbol{w}$ es un vector de E tal que: $\boldsymbol{v} + F = \boldsymbol{w} + F$, no se deduce necesariamente que $\boldsymbol{v}$ sea igual a $\boldsymbol{w}$. ▲

EJEMPLO 28 Si F es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathbb{R}(1,0,1) + \mathbb{R}(0,1,0),$$

se verifica: $(4,0,0) + F = (0,0,-4) + F$.

En efecto, podemos escribir: $(4,0,0) = (0,0,-4) + (4,0,4)$, con $(4,0,4) \in F$; de esta forma: $(4,0,0) \in (0,0,-4) + F$, y por tanto (cf. proposición I.5, p. 56):

$$(4,0,0) + F = (0,0,-4) + F.$$

2. Intersección de subespacios afines Puede ocurrir que dos subespacios afines de un espacio vectorial no tengan ningún vector en común; en este caso, su intersección es el conjunto vacío, que no es subespacio afín.

EJEMPLO 29 Los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1,1,0) + \mathbb{R}(1,0,1) \quad \text{y} \quad B = (2,0,-1) + \mathbb{R}(0,1,1),$$

son tales que $A \cap B = \emptyset$, como el lector puede comprobar fácilmente.

Pero si la intersección no es el conjunto vacío, entonces ésta es un subespacio afín, como probamos en la siguiente proposición.

Intersección de subespacios afines

Proposición I.8 *Si $\boldsymbol{v}+F$ y $\boldsymbol{w}+G$ son subespacios afines de un espacio vectorial E tales que su intersección es no vacía: $(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)\neq\emptyset$, entonces:*

$$(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)=\boldsymbol{z}+(F\cap G),$$

donde $\boldsymbol{z}$ es un vector de $(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)$.

Demostración Como, por hipótesis, $\boldsymbol{z}\in(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)$, se tiene (cf. proposición I.5, p. 56): $\boldsymbol{v}+F=\boldsymbol{z}+F$ y $\boldsymbol{w}+G=\boldsymbol{z}+G$, y por tanto:

$$(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)=(\boldsymbol{z}+F)\cap(\boldsymbol{z}+G). \tag{20}$$

Si $\boldsymbol{x}$ es un vector de E, se verifica:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{z}+F)\cap(\boldsymbol{z}+G) &\iff \begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{z}+F\\ \quad\text{y}\\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{z}+G\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\in F\\ \quad\text{y}\\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\in G\end{cases}\\ &\iff \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\in F\cap G \iff \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{z}+(F\cap G),\end{aligned}$$

y en consecuencia: $(\boldsymbol{z}+F)\cap(\boldsymbol{z}+G)=\boldsymbol{z}+(F\cap G)$, que unido a (20) permite finalmente concluir: $(\boldsymbol{v}+F)\cap(\boldsymbol{w}+G)=\boldsymbol{z}+(F\cap G)$. C.Q.D.

EJEMPLO 30 Recordemos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ vistos en el ejemplo 10 (cf. p. 42):

$$F_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1-2x_2+x_3=0\},$$
$$F_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1=2x_3\},$$

los cuales verifican: $F_1\cap F_2=\mathbb{R}(4,3,2)$, y consideremos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$A=(3,2,1)+F_1 \quad\text{y}\quad B=(7,5,3)+F_2.$$

La intersección $A\cap B$ no es el conjunto vacío, pues por ejemplo (como el lector puede comprobar sin dificultad): $(-1,-1,-1)\in A\cap B$. La proposición I.8 nos permite asegurar que $A\cap B$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$:

$$A\cap B=(-1,-1,-1)+F_1\cap F_2=(-1,-1,-1)+\mathbb{R}(4,3,2).$$

3. Hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ Llamamos **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de la forma:

$$H = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = d\right\},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y d son números reales, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son simultáneamente nulos.

EJEMPLO 31 El conjunto siguiente:

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 7\right\},$$

es un hiperplano de $\mathbb{R}^2$.

El conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 - x_4 = 4\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^4$.

El conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_5 = 0\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^6$.

Los hiperplanos son subespacios afines, como vemos en la siguiente proposición.

Un hiperplano es subespacio afín

Proposición I.9 *Todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración Hacemos la demostración para $n = 3$.

Sea $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d\}$ un hiperplano de $\mathbb{R}^3$. Si $d = 0$, entonces A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$. Si $d \neq 0$ y, por ejemplo, $a_1 \neq 0$, designemos por B el siguiente subespacio afín:

$$B = \left(\frac{d}{a_1}, 0, 0\right) + F, \tag{21}$$

siendo F el subespacio vectorial $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$. Entonces se verifica: $A = B$, y el hiperplano A es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$.

En efecto, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
(t_1, t_2, t_3) \in B &\iff (t_1, t_2, t_3) - \left(\frac{d}{a_1}, 0, 0\right) \in F \\
&\iff \left(t_1 - \frac{d}{a_1}, t_2, t_3\right) \in F \\
&\iff a_1\left(t_1 - \frac{d}{a_1}\right) + a_2t_2 + a_3t_3 = 0 \\
&\iff a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 = d \\
&\iff (t_1, t_2, t_3) \in A,
\end{aligned}$$

y como consecuencia: $A = B$.

Si fuera $a_1 = 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces la definición de B, en (21), hubiese sido:

$$B = \left(0, \frac{d}{a_2}, 0\right) + F;$$

y si fuera a_3 el único no nulo, hubiese sido: $B = (0,0,d/a_3) + F$. En ambos casos, se comprueba que $A = B$.

La demostración para el caso general es análoga: si H es el hiperplano de $\mathbb{R}^n$:

$$H = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = d\right\},$$

entonces existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_k \neq 0$, y se tiene:

$$H = \left(0, \dots, 0, \frac{d}{a_k}, 0, \dots, 0\right) + \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\right\};$$

y quedaría así probado que H es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$. C.Q.D.

EJEMPLO 32 El siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 - x_4 = 4\},$$

es un hiperplano y, de acuerdo con la proposición anterior, un subespacio afín de $\mathbb{R}^4$. Un coeficiente no nulo en la condición de la definición de A es el de x_2, que es igual a 2. Por tanto:

$$A = \left(0, \frac{4}{2}, 0, 0\right) + F,$$

donde $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 - x_4 = 0\}$.

EJEMPLO 33 Es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$ el conjunto:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 4\},$$

el cual ya se comprobó es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ (cf. ejemplo 26, p. 55). De acuerdo con lo dicho en los párrafos precedentes, se tiene:

$$A = \left(\frac{4}{1}, 0, 0\right) + \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}.$$

4. Subespacios afines paralelos De dos subespacios afines $\boldsymbol{v} + F$ y $\boldsymbol{w} + G$ de un espacio vectorial E diremos son **paralelos** si $F = G$.

Algunos autores definen el *paralelismo débil*: el subespacio afín $\boldsymbol{v} + F$ es **débilmente paralelo** al subespacio afín $\boldsymbol{w} + G$ si $F \subseteq G$.

EJEMPLO 34 El hiperplano (de $\mathbb{R}^3$) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 4\}$ y el subespacio afín (también de $\mathbb{R}^3$) $C = (1,1,1) + \mathbb{R}(1,0,1) + \mathbb{R}(0,1,0)$ son paralelos, pues se verifica (cf. ejemplo 26, p. 55): $A = (4,0,0) + \mathbb{R}(1,0,1) + \mathbb{R}(0,1,0)$.

EJEMPLO 35 La recta $(1,2,3) + \mathbb{R}(1,2,1)$ es débilmente paralela al subespacio afín A del ejemplo anterior, ya que: $\mathbb{R}(1,2,1) \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$.

5. Combinaciones afines Dados n vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ de un espacio vectorial E, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son n escalares tales que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1,$$

del vector $\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{w}_n$ diremos es una **combinación afín** de los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$.

EJEMPLO 36 El vector $(0,-1,3)$ de $\mathbb{R}^3$ es una combinación afín de los vectores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$, pues, por ejemplo, los escalares -2, 1 y 2 son tales que suman 1: $(-2)+1+2=1$, y se tiene:

$$(0,-1,3) = (-2)(1,1,0) + 1(0,1,1) + 2(1,0,1).$$

Todo vector que es combinación afín de vectores de un mismo subespacio afín pertenece, a su vez, al subespacio afín. Para comprobarlo, consideremos un subespacio afín $\boldsymbol{v} + F$ de un espacio vectorial E, y sean $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_n$ vectores pertenecientes a $\boldsymbol{v}+F$ (y por tanto $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ son vectores del subespacio vectorial F). Si $\boldsymbol{w}$ es un vector de E que es una combinación afín de ellos, probemos que $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v}+F$.

Por ser $\boldsymbol{w}$ una combinación afín de $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_n$, existen escalares α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que: $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, y

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_2) + \cdots + \alpha_n(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_n). \tag{22}$$

Simplificando en la igualdad (22), obtenemos:

$$\boldsymbol{w} = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i,$$

y como $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i \in F$ (pues es combinación lineal de $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, vectores del subespacio vectorial F), se concluye: $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v}+F$.

Escolio Si $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_n$ son vectores del subespacio afín $\boldsymbol{v}+F$, y $\boldsymbol{w}$ es el vector:

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_2) + \cdots + \alpha_n(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_n), \tag{23}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares tales que:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 1, \tag{24}$$

entonces $\boldsymbol{w}$ *no* pertenece a $\boldsymbol{v}+F$, salvo en el caso elemental en que $\boldsymbol{v}+F$ sea subespacio vectorial de E.

En efecto. Supongamos que $\boldsymbol{v}+F$ no es subespacio vectorial, y por tanto que $\boldsymbol{v}\notin F$ (cf. proposición I.6, p. 57). Queremos probar, bajo las hipótesis enunciadas en el párrafo anterior, se tiene que $\boldsymbol{w}\notin\boldsymbol{v}+F$, y para ello procedemos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{v}+F$. De (23) obtenemos:

$$\boldsymbol{w}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)\boldsymbol{v}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i;$$

pero si $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{v}+F$, entonces existe $\boldsymbol{u}\in F$ tal que: $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$, y por tanto:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)\boldsymbol{v}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u},$$

o bien:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i,$$

de donde (teniendo en cuenta (24)):

$$\boldsymbol{v}=\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)-1\Big)^{-1}\Big(\boldsymbol{u}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{u}_i\Big),$$

que contradice el hecho de que $\boldsymbol{v}\notin F$, pues el segundo miembro de esta igualdad es un vector de F.

En particular, si $\boldsymbol{v}+F$ es un subespacio afín de un espacio vectorial E y $\boldsymbol{v}+F$ no es subespacio vectorial, entonces se verifica:

$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K}-\{1\},\ \forall\,\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{v}+F,\ \lambda\boldsymbol{w}\notin\boldsymbol{v}+F.$$

▲

I.5 SISTEMAS DE VECTORES

En esta sección introducimos varias definiciones y notaciones que serán de gran utilidad en el resto del texto.

Consideremos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Llamaremos **sistema de vectores** de E a toda lista, o colección, finita ordenada de vectores de E. Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ son n vectores de E, el sistema S formado por ellos se denota:

$$S=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n).$$

De los vectores $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ diremos son los vectores del sistema S. Al conjunto formado por ellos lo denotaremos por $\boldsymbol{S}$.

Dados dos sistemas $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ y $(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m)$ de n y m vectores de E, respectivamente, consideraremos son iguales si:

$$n=m\quad\text{y}\quad \boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{w}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{w}_n.$$

EJEMPLO 37 Consideremos los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1)$ y $\boldsymbol{v}_4 = (2,2)$ de $\mathbb{R}^2$. Con ellos podemos formar, entre otros, los siguientes sistemas:

- $S_1 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$,
- $S_2 = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_3)$,
- $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4)$, donde observamos que el vector $\boldsymbol{v}_1$ figura dos veces,
- $B = (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)$, donde observamos que el vector $\boldsymbol{v}_4$ figura tres veces, y el vector $\boldsymbol{v}_1$ dos.

Los conjuntos asociados a estos cuatro sistemas son: $S_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, $S_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$, $A = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4\}$ y $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4\}$.

Dado un sistema $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de vectores de E, definimos el **cardinal** de S, que denotamos: $\mathsf{Card}(S)$, como el número de vectores de la lista que define S. Es decir: $\mathsf{Card}(S) = \mathsf{Card}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = n$.

EJEMPLO 38 El cardinal de los sistemas del ejemplo 37 es: $\mathsf{Card}(S_1) = 3$, $\mathsf{Card}(S_2) = 4$, $\mathsf{Card}(A) = 3$ y $\mathsf{Card}(B) = 5$.

Dados dos sistemas $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ y $S' = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ de vectores de E, definimos el sistema (S, S') de la forma: $(S, S') = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$.

EJEMPLO 39 Volviendo de nuevo a los sistemas del ejemplo 37 (cf. p. 64), podemos escribir:

$$(S_1, (\boldsymbol{v}_1)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) \quad \text{y} \quad (A, B) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1).$$

Dados dos sistemas S y S' de vectores de E, diremos que S es **subsistema** de S' si todo vector de S es de S' y no figura en la lista de los vectores de S más veces que en la de S'.

EJEMPLO 40 Para los sistemas del ejemplo 37 (cf. p. 64) se cumple:

- S_1 es un subsistema de S_2;
- A es un subsistema de B, puesto que $\boldsymbol{v}_1$ no figura más veces en A que en B, y $\boldsymbol{v}_4$ figura menos veces en A que en B;
- S_2 no es subsistema de S_1, pues $\boldsymbol{v}_4$ es un vector de S_2, pero no lo es de S_1;
- B no es subsistema de A, pues, aunque todo vector de B es vector de A, el vector $\boldsymbol{v}_4$ figura más veces en B que en A.

I.6 VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES

1. Definición. Propiedades básicas A continuación, vemos la definición de dependencia lineal de vectores:

Vectores linealmente dependientes

Sistema ligado

> Definición
>
> Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. De los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de E se dice son **linealmente dependientes**, o del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ se dice es un **sistema ligado**, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *no todos nulos*, tales que:
>
> $$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Consecuencias de la definición de dependencia lineal Sea E un espacio vectorial. Se verifica:

- *$(\mathbf{0})$ es un sistema ligado.*
  En efecto: $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $1 \neq 0$; es decir, el vector $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente, o lo que es lo mismo: $(\mathbf{0})$ es un sistema ligado.
- *Si $\boldsymbol{v}$ es un vector de E distinto del vector $\mathbf{0}$, entonces $(\boldsymbol{v})$ no es un sistema ligado.*
  Si α es un escalar, de la igualdad $\alpha\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ se deduce (consecuencia de la definición de espacio vectorial) que $\alpha = 0$; es decir, no podemos encontrar un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. El vector $\boldsymbol{v}$ no es un vector linealmente dependiente, o bien: $(\boldsymbol{v})$ no es un sistema ligado.
- *Todo sistema de vectores en el que figure el vector $\mathbf{0}$ es ligado.*
  Que el sistema $(\mathbf{0})$ es ligado lo sabemos por la primera consecuencia de la definición de dependencia lineal. Por otra parte, si $B = (\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ (donde $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$), entonces es posible encontrar escalares $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tales que:

  $$\beta\mathbf{0} + \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

  (por ejemplo: $\beta = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$), lo que establece que el sistema B es ligado.
- *Todo sistema en el que uno de los vectores es igual a una combinación lineal de los restantes es ligado.*
  Si $\boldsymbol{w}$ es igual a una combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, es decir, para algunos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se tiene: $\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$, entonces:

  $$(-1)\boldsymbol{w} + \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0},$$

  y no todos los escalares $(-1), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son nulos. Los vectores $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son, pues, linealmente dependientes, o lo que es lo mismo: el sistema $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es ligado.

EJEMPLO 41 Los vectores $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ no son linealmente dependientes.

En efecto. Si α y β son escalares tales que:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(3,2,1) = (0,0,0), \tag{25}$$

o lo que es lo mismo: $(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta) = (0,0,0)$, entonces:

$$\alpha + 3\beta = 0, \quad 2\alpha + 2\beta = 0, \quad 3\alpha + \beta = 0.$$

De la segunda igualdad deducimos: $\alpha = -\beta$, y sustituyendo en la primera llegamos a: $2\beta = 0$, y por tanto: $\beta = 0$ y $\alpha = 0$. En consecuencia, sólo los escalares $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ verifican (25).

Al no existir dos escalares α y β, no ambos nulos, que satisfagan (25), concluimos que los vectores $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$ no son linealmente dependientes, o lo que es lo mismo: el sistema $((1,2,3),(3,2,1))$ no es un sistema ligado.

EJEMPLO 42 Los vectores $(1,1)$, $(1,3)$ y $(3,1)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, pues por ejemplo los tres escalares -4, 1 y 1 no son todos nulos y se verifica: $-4(1,1) + 1(1,3) + 1(3,1) = (0,0)$.

EJERCICIO 2 *Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es ligado el sistema de vectores $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ de $\mathbb{R}^3$.* ▲

2. Otras propiedades En las siguientes proposiciones mostramos dos propiedades de la dependencia lineal.

CNS de sistema de dos vectores ligado

Proposición I.10 *Sean $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ dos vectores de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, entonces una condición necesaria y suficiente para que $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ sea un sistema ligado es: $\boldsymbol{w} \in \mathbb{K}\boldsymbol{v}$.*

Demostración La condición es necesaria. Si α y β son dos escalares, no ambos nulos, tales que:

$$\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \tag{26}$$

entonces $\beta \neq 0$, pues en caso contrario de (26) se deduciría: $\alpha\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, y como por hipótesis $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, se tendría: $\alpha = 0$, que vulneraría que los escalares no son ambos nulos. Al ser $\beta \neq 0$, de (26) se deduce: $\boldsymbol{w} = \beta^{-1}(-\alpha)\boldsymbol{v}$, y por tanto: $\boldsymbol{w} \in \mathbb{K}\boldsymbol{v}$.

La condición es suficiente. Si $\boldsymbol{w} \in \mathbb{K}\boldsymbol{v}$, entonces $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, y podemos escribir: $(-\lambda)\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. Al no ser los escalares $-\lambda$ y 1 simultáneamente nulos, esta igualdad establece que $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ es un sistema ligado. (I.10)

EJEMPLO 43 Encontremos para qué valores reales de a y b son linealmente dependientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v} = (1, -1, 2) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{w} = (2, a, b).$$

Como $\boldsymbol{v} \neq (0,0,0)$, la proposición I.10 afirma que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente dependientes precisamente si: $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}\boldsymbol{v}$, es decir, precisamente si existe algún número real α tal que:

$$\alpha(1, -1, 2) = (2, a, b).$$

Esta igualdad vectorial es equivalente a:

$$\alpha = 2, \quad -\alpha = a, \quad 2\alpha = b,$$

equivalente a su vez a: $\alpha = 2$, $a = -2$ y $b = 4$.

En conclusión, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente dependientes si, y sólo si, $a = -2$ y $b = 4$.

En la siguiente proposición se presenta una condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores sea un sistema ligado.

Proposición I.11 *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores sea ligado es que exista un sistema ligado que sea subsistema suyo.*

Demostración La condición es obviamente necesaria, pues todo sistema es subsistema de sí mismo.

La condición también es suficiente. Para demostrarlo, consideremos un sistema de vectores $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, y supongamos es ligado el sistema:

$$B' = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p), \quad \text{con } p \leqslant n,$$

que es subsistema de B (no se pierde generalidad al suponer que tal subsistema ligado es de esta forma). Como B' es un sistema ligado, existen escalares α_1, α_2, ..., α_p, no todos nulos, tales que:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}. \tag{27}$$

Si definimos: $\alpha_j = 0$ para $p < j \leqslant n$, entonces los escalares α_1, α_2, ..., α_n no son todos nulos, y de acuerdo con (27) podemos escribir:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0},$$

lo que establece que el sistema B es ligado. C.Q.D.

Nota bene Puede ocurrir que un sistema B sea ligado y que todo subsistema de B de cardinal menor no lo sea. Por ejemplo, el sistema de vectores $((1,0), (0,1), (1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ es un sistema ligado, pero cualquier subsistema suyo de cardinal menor no es un sistema ligado, como el lector puede comprobar sin dificultad. ▲

EJEMPLO 44 Estudiemos para qué valores reales de a, b, c y d es ligado este sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \Big((a, -b, 5), (1, -1, 2), (1, 3, c + b), \big(a + b + c, \sqrt[3]{|b^2 - c^3|}, d\big), (2, -2, 4)\Big).$$

En el ejemplo 43 (cf. p. 67) vimos que el sistema $B' = ((1, -1, 2), (2, -2, 4))$ es un sistema ligado. Como B' es un subsistema de B, de la proposición I.11 (cf. p. 67) se deduce que también B es un sistema ligado.

Nótese que el sistema B es un sistema ligado independientemente de los valores que puedan tomar a, b, c y d.

I.7 VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

1. Definición. Propiedades básicas De manera informal podemos decir que la independencia lineal es la negación de la dependencia lineal. De forma más precisa:

Vectores linealmente independientes

Sistema libre

Definición

De los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ se dice son **linealmente independientes**, o del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ se dice es un **sistema libre**, si los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ no son linealmente dependientes, es decir, si de la igualdad:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0},$$

donde α_1, α_2, ..., α_n son escalares, necesariamente se deduce:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Consecuencias de la definición de independencia lineal Sea E un espacio vectorial. Se verifica:

- $(\mathbf{0})$ *no es un sistema libre.*
  Ya vimos que $(\mathbf{0})$ es un sistema ligado.
- *Si $\boldsymbol{v}$ es un vector de E distinto de $\mathbf{0}$, entonces $(\boldsymbol{v})$ es un sistema libre.*
  Ya probamos que si $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $(\boldsymbol{v})$ no es un sistema ligado.
- *Un sistema de vectores en el que figure el vector $\mathbf{0}$ no es libre.*
  En la sección anterior probamos que un sistema en estas condiciones es un sistema ligado.
- *Un sistema en el que uno de los vectores es combinación lineal de los restantes no es libre.*
  Vimos en la sección anterior que si $\boldsymbol{w}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, entonces $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema ligado.

EJEMPLO 45 Los vectores $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes, pues, como vimos en el ejemplo 41 (cf. p. 66), estos vectores no son linealmente dependientes.

Recordemos que en el ejemplo citado buscamos qué valores de α y β verificaban:

$$\alpha(1,2,3) - \beta(3,2,1) = (0,0,0),$$

y vimos que la única posibilidad es: $\alpha = \beta = 0$, lo que confirma que los vectores $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$ son efectivamente linealmente independientes, o dicho de otra forma: el sistema $((1,2,3),(3,2,1))$ es libre.

EJEMPLO 46 Los vectores $(1,1)$, $(1,3)$ y $(3,1)$ de $\mathbb{R}^2$ no son linealmente independientes, pues son linealmente dependientes (cf. ejemplo 42, p. 66).

Si tratamos de resolver en las incógnitas α, β y γ la ecuación:

$$\alpha(1,1) + \beta(1,3) + \gamma(3,1) = (0,0), \tag{28}$$

no obtenemos *necesariamente* que $\alpha = \beta = \gamma = 0$: como ya vimos en el ejemplo citado, para $\alpha = -4$, $\beta = 1$ y $\gamma = 1$ se verifica (28).

EJERCICIO 3 *Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es libre el sistema de vectores* $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ *de* $\mathbb{R}^3$. ▲

2. Otras propiedades El resultado siguiente es una consecuencia inmediata de la proposición I.10 (cf. p. 66):

C.S de sistema de dos vectores libre

Proposición I.12 *Sean v y w dos vectores de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $v \neq 0$, entonces una condición necesaria y suficiente para que (v,w) sea un sistema libre es: $w \notin \mathbb{K}v$.*

EJEMPLO 47 Estudiemos para qué valores reales de a y b son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v = (1,-1,2) \quad \text{y} \quad w = (2,a,b).$$

En el ejemplo 43 (cf. p. 67) vimos que v y w son linealmente dependientes precisamente si: $a = -2$ y $b = 4$. Por tanto, v y w son linealmente independientes precisamente si: $a \neq -2$ o $b \neq 4$.

Proposición I.13 *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores sea libre es que todo subsistema suyo sea un sistema libre.*

Demostración La condición es necesaria: si B es un sistema libre y B' es un subsistema de B, entonces B' es un sistema libre, pues en caso contrario tampoco sería libre B (cf. proposición I.11, p. 67).

Recíprocamente, la condición es suficiente: si todo subsistema de un sistema B es un sistema libre, también es libre el propio B, pues es subsistema de sí mismo. C.Q.D.

EJERCICIO 4 *Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vectores de un espacio vectorial E. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un vector $\boldsymbol{w} \in E$ no sea una combinación lineal de estos vectores es que de la igualdad:*

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n + \beta \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0},$$

se deduzca: $\beta = 0$. ▲

EJEMPLO 48 Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el vector $(a, 1, a+1)$ de $\mathbb{R}^3$ no es igual a una combinación lineal de los vectores $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$.

En efecto, de la igualdad:

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1) + \beta(a,1,a+1) = (0,0,0)$$

se obtiene:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + a\beta = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 + \beta = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_3 + a\beta + \beta = 0,$$

de donde (restando la primera igualdad de la tercera) se deduce: $\beta = 0$. Con el ejercicio 4 se concluye el resultado.

EJERCICIO 5 *Demostrar que si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema libre de vectores de un espacio vectorial E y $\boldsymbol{w}$ es un vector de E que no es igual a una combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, entonces $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ también es un sistema libre.* ▲

I.8 SISTEMAS DE GENERADORES Y BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

1. Sistemas de generadores Sea $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ un sistema de vectores de un espacio vectorial E. Por: $L(B)$, o también: $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, denotaremos el conjunto de todos los vectores de E que son combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$; es decir (cf. p. 53):

$$L(B) = L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_n.$$

El conjunto $L(B)$ es, pues, un subespacio vectorial de E: es el subespacio vectorial de E de los vectores que pueden escribirse de la forma:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

Sistema de generadores

Definición

De unos vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de un espacio vectorial E diremos son **generadores** de E, o que E está **generado** por los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, o del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ diremos es un **sistema de generadores** de E, si:

$$L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = E,$$

es decir, si todo vector de E es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Si los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son generadores del espacio vectorial E y $\boldsymbol{v}$ es un vector de E, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

De esta igualdad diremos es una **descomposición** del vector $\boldsymbol{v}$ como combinación lineal de los generadores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

EJEMPLO 49 El sistema $((1,0),(1,1),(0,1))$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$.

En efecto. Para cada vector (a,b) de $\mathbb{R}^2$ se verifica:

$$(a,b) = \frac{a}{2}(1,0) + \frac{a}{2}(1,1) + \left(b - \frac{a}{2}\right)(0,1),$$

lo que establece que (a,b) es combinación lineal de los vectores $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. En consecuencia:

$$L((1,0),(1,1),(0,1)) = \mathbb{R}^2.$$

Con palabras: $\mathbb{R}^2$ está generado por los vectores $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.

EJEMPLO 50 El sistema $((1,1,0),(0,1,1))$ no es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

Por ejemplo, el vector $(1,1,1)$ no es combinación lineal de $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$. En efecto, afirmarlo sería lo mismo que afirmar existen dos números reales α y β tales que el vector:

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1), \quad \text{o bien } (\alpha, \alpha+\beta, \beta),$$

es igual a $(1,1,1)$, pero esto significaría decir que tanto α y β como su suma: $\alpha + \beta$, son iguales a 1, lo cual es claramente imposible.

EJERCICIO 6 *Sean $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p)$ y $B = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_q)$ dos sistemas de vectores de un espacio vectorial E. Demostrar:*

a) $A \subseteq L(A)$;

b) *si F es subespacio vectorial de E, se verifica:* $A \subseteq F \implies L(A) \subseteq F$;

c) $A \subseteq L(B) \implies L(A) \subseteq L(B)$;

d) *si A es subsistema de B, entonces:* $L(A) \subseteq L(B)$;

e) *para cada $\boldsymbol{u} \in E$ se tiene:* $L(A) = L(B) \Rightarrow L(A, (\boldsymbol{u})) = L(B, (\boldsymbol{u}))$;

f) *si A es un sistema de generadores de E y A es subsistema de B, entonces B también es un sistema de generadores de E.* ▲

2. Bases. Coordenadas de un vector en una base A continuación definimos el concepto de base de un espacio vectorial:

Definición

Base De un sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ de vectores de un espacio vectorial E se dice es una **base** de E si:

(B1) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema de generadores de E, o escrito de otra forma: $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = E$;

(B2) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema libre, o lo que es lo mismo: los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ son linealmente independientes.

EJEMPLO 51 El sistema $B = ((1,1), (0,1))$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

En efecto: B es un sistema libre, pues $(1,1) \notin \mathbb{R}(0,1)$ (cf. proposición I.12, p. 69). Y B es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$, pues si (a,b) es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$(a,b) = a(1,1) + (b-a)(0,1),$$

lo que establece que todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $(1,1)$ y $(0,1)$.

EJEMPLO 52 El sistema: $((1,0), (1,1), (0,1))$ no es una base de $\mathbb{R}^2$, pues aunque es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$ (cf. ejemplo 49, p. 71), no es un sistema libre: por ejemplo, los escalares -1, 1 y -1 —no todos nulos— verifican: $(-1)(1,0) + 1(1,1) + (-1)(0,1) = (0,0)$.

EJERCICIO 7 *Si $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p)$ y $B' = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_q)$ son dos bases de un espacio vectorial E, demostrar que no puede ocurrir: $B \subset B'$, ni tampoco: $B' \subset B$.* ▲

Nota Obsérvese que es posible que dos bases de un mismo espacio vectorial no tengan vector alguno en común. Por ejemplo, los sistemas $((1,1), (0,1))$ y $((-1,-1), (0,-1))$ son, ambos, base de $\mathbb{R}^2$ y no tienen vectores comunes. ▲

La descomposición de un vector como combinación lineal de los vectores de una base es única

Proposición I.14 *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de un espacio vectorial E sea una base de E es que todo vector de E se pueda descomponer de manera única como combinación lineal de los vectores de B, en el sentido siguiente: si*

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \quad y \quad \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}_n$$

son dos descomposiciones de un mismo vector como combinación lineal de los vectores de B, entonces:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

Demostración La condición es necesaria. Supongamos que B es una base de E. Por ser B un sistema de generadores de E, todo vector $\boldsymbol{w}$ de E puede escribirse al menos de una forma como combinación lineal de los vectores de B. Supongamos se verifica:

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \quad y \quad \boldsymbol{w} = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}_n,$$

para algunos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Restando a la primera igualdad la segunda, se obtiene:

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{v}_n,$$

y de esta última igualdad, por ser B un sistema libre, se deduce:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

o bien: $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots$, $\alpha_n = \beta_n$. En conclusión, todo vector de E se escribe de una única manera como combinación lineal de los vectores de B.

La condición es suficiente. Supongamos que todo vector de E se puede descomponer de una única manera como combinación lineal de los vectores de B. En primer lugar, ya tenemos que el sistema B es un sistema de generadores de E. En segundo lugar, para el vector $\mathbf{0}$ se verifica: $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n$, y esta descomposición es única, luego de la igualdad $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ se deduce necesariamente: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, y así el sistema B también es un sistema libre. En conclusión, B es una base de E. C.Q.D.

Coordenadas de un vector en una base

Si $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de un espacio vectorial E, entonces podemos afirmar (cf. proposición I.14, p. 73) que para cada vector $\boldsymbol{v}$ de E existen unos *únicos* escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

De $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se dice son las **coordenadas** del vector $\boldsymbol{v}$ en la base B.

Es decir, que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sean las coordenadas del vector $\boldsymbol{v}$ en la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ significa: $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$.

EJEMPLO 53 En el ejemplo 51 (cf. p. 72) vimos que el sistema $((1,1),(0,1))$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y observamos que si (a,b) es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$(a,b) = a(1,1) + (b-a)(0,1).$$

Nos preguntamos si habrá otras formas de escribir (a,b) como combinación lineal de $(1,1)$ y $(0,1)$; en otras palabras, si la ecuación:

$$(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(0,1), \tag{29}$$

en las incógnitas α y β, admite otras soluciones distintas de $\alpha = a$ y $\beta = b - a$.

De acuerdo con la proposición I.14 (cf. p. 73), y como consecuencia de que el sistema $((1,1),(0,1))$ es una base de $\mathbb{R}^2$, podemos afirmar que la única solución de (29) es: $\alpha = a$ y $\beta = b-a$. O dicho de otra forma: los escalares a y $b-a$ son las coordenadas del vector (a,b) en la base $((1,1),(0,1))$.

Por ejemplo, las coordenadas del vector $(6,5)$ en la base $((1,1),(0,1))$ son 6 y -1, pues: $(6,5) = 6(1,1) + (-1)(0,1)$.

Nota bene Es fundamental el orden en que se escriben las coordenadas de un vector en una base. En este ejemplo vemos que 6 y -1 son las coordenadas de $(6,5)$ en la base $((1,1),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$; el vector cuyas coordenadas son -1 y 6 (en la misma base) sería: $(-1)(1,1) + 6(0,1) = (-1,5)$. ▲

3. Base canónica Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo, y sea $n \geqslant 1$ un número natural. Como ya se vio en el capítulo I (cf. p. 17), el conjunto $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) + (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n),$$
$$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = (\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\dots,\lambda\alpha_n).$$

El siguiente sistema de n vectores:

$$B_C = ((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)),$$

es una base de $\mathbb{K}^n$. En efecto. El sistema B_C es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^n$, pues si $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ es un elemento arbitrario de $\mathbb{K}^n$, entonces:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,0,\dots,0) + \cdots + \alpha_n(0,\dots,0,1).$$

También es B_C un sistema libre, pues de la igualdad:

$$\beta_1(1,0,\dots,0) + \beta_2(0,1,0,\dots,0) + \cdots + \beta_n(0,\dots,0,1) = (0,0,\overset{n)}{\dots},0)$$

se deduce: $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (0,0,\overset{n)}{\dots},0)$, o bien: $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

De la base B_C se dice es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Notación Para los vectores de la base canónica de $\mathbb{K}^n$, utilizaremos la notación siguiente:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\ldots,0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n = (0,\ldots,0,1).$$

La base canónica de $\mathbb{K}^n$ es, pues, el sistema: $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. ▲

Dado un vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{K}^n$, si las componentes de $\boldsymbol{x}$ son: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, si: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces la descomposición de $\boldsymbol{x}$ como combinación lineal de los vectores de B_C es:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Esto es: las coordenadas de un vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{K}^n$ en la base canónica son precisamente sus componentes.

EJEMPLO 54 En $\mathbb{R}^2$ se tiene: $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$. La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es el sistema $((1,0),(0,1))$.

En $\mathbb{R}^3$ se tiene: $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ y $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$, y la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Obsérvese que hemos designado con la misma notación los vectores $(1,0)$ y $(1,0,0)$, y que lo mismo acontece con los vectores $(0,1)$ y $(0,1,0)$. La práctica demuestra que este abuso de notación no da lugar a confusión.

Nota bene Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $n \geqslant 1$ es un número natural, sabemos qué es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. En general, sólo tiene sentido referirse a la base canónica de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si $E = \mathbb{K}^n$ para algún $n \geqslant 1$. ▲

4. *Teorema de la base incompleta*

El llamado teorema de la base incompleta se enuncia de la siguiente manera:

Teorema de la base incompleta

Teorema 1 *Si el sistema:*

$$S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

es un sistema de generadores de un espacio vectorial E, y si los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_p$ son linealmente independientes, entonces existe una base de E que es subsistema de S, y en la que figuran los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$.

Demostración Designemos por B el sistema libre $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$.

Definimos el sistema B_{p+1} de la forma siguiente:

$$B_{p+1} = \begin{cases} B, & \text{si } \boldsymbol{v}_{p+1} \in L(B), \\ (B, (\boldsymbol{v}_{p-1})), & \text{si } \boldsymbol{v}_{p+1} \notin L(B). \end{cases}$$

Se verifica:

a) B_{p+1} es un sistema libre (cf. ejercicio 5, p. 70), y B es subsistema de B_{p+1},

b) $\boldsymbol{v}_{p+1} \in L(B_{p+1})$.

Ahora, definimos B_{p+2}:

$$B_{p+2} = \begin{cases} B_{p+1}, & \text{si } \boldsymbol{v}_{p+2} \in L(B_{p+1}), \\ (B_{p+1}, (\boldsymbol{v}_{p+2})), & \text{si } \boldsymbol{v}_{p+2} \notin L(B_{p+1}), \end{cases}$$

que verifica:

a) B_{p+2} es un sistema libre, y B_{p+1} es subsistema de B_{p+2},

b) $\boldsymbol{v}_{p+2} \in L(B_{p+2})$.

Iterando este proceso llegamos al sistema B_n:

$$B_n = \begin{cases} B_{n-1}, & \text{si } \boldsymbol{v}_n \in L(B_{n-1}), \\ (B_{n-1}, (\boldsymbol{v}_n)), & \text{si } \boldsymbol{v}_n \notin L(B_{n-1}), \end{cases}$$

que verifica:

a) B_n es un sistema libre, y B_{n-1} es subsistema de B_n,

b) $\boldsymbol{v}_n \in L(B_n)$.

De esta construcción se deduce que B es subsistema de B_n, que a su vez es subsistema de S, y de los apartados (a) se infiere (cf. ejercicio 6, p. 72):

$$B \subseteq L(B) \subseteq L(B_{p+1}) \subseteq \ldots \subseteq L(B_n) \subseteq L(S). \tag{30}$$

De los apartados (b) y de (30) se deduce: $S \subseteq L(B_n) \subseteq L(S)$, de donde (cf. ejercicio 6, p. 72): $L(S) \subseteq L(B_n) \subseteq L(S)$, y en consecuencia: $L(B_n) = L(S) = E$, y el sistema libre B_n es un sistema de generadores de E.

En definitiva, B_n es una base de E que es subsistema de S y en la que figuran los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$. C.Q.D.

El teorema anterior tiene una consecuencia importante: no hay dos bases de un mismo espacio vectorial con distinto número de vectores.

Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual número de vectores

Proposición 1.15 *Si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ y $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$ son dos bases de un espacio vectorial E, entonces: $p = q$.*

Demostración Procedemos por reducción al absurdo; hacemos la hipótesis de que $p < q$.

En primer lugar, el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1)$ es un sistema de generadores de E, y como $(\boldsymbol{w}_1)$ es un sistema libre (al ser subsistema de $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$, que es sistema libre), del teorema de la base incompleta se deduce existe una base B_1 tal que:

a) $(\boldsymbol{w}_1)$ es subsistema de B_1,

b) B_1 es subsistema de $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1)$.

Pero como $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1)$ no es base de E (obsérvese que $\boldsymbol{w}_1$ es combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$), de (b) se deduce que el número de elementos de B_1 es a lo más igual a p. En símbolos: $\mathrm{Card}(B_1) \leqslant p$.

En segundo lugar, consideramos el sistema: $(B_1, (\boldsymbol{w}_2))$, que es un sistema de generadores de E. Como $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ es un sistema libre que es subsistema de $(B_1, (\boldsymbol{w}_2))$, existe una base B_2 de E tal que:

a) $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ es subsistema de B_2,

b) B_2 es subsistema de $(B_1, (\boldsymbol{w}_2))$.

Pero como $(B_1, (\boldsymbol{w}_2))$ no es base de E, se tiene: $\mathrm{Card}(B_2) \leqslant p$.

Iterando este proceso construimos una colección finita de bases B_s de E tales que el sistema $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s)$ es subsistema de B_s y $\mathrm{Card}(B_s) \leqslant p$. De esta forma, llegaremos a construir una base B_m tal que: $B_m = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ y $m \leqslant p$, lo cual es absurdo, pues se afirmaría que los sistemas:

$$(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m) \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_q), \quad \text{con } m < q,$$

son dos bases de E (cf. ejercicio 7, p. 72).

Por tanto, no puede ser p estrictamente menor que q. De la misma forma demostraríamos que tampoco puede ser q estrictamente menor que p. En conclusión: $p = q$. C.Q.D.

I.9 DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

1. Definición de dimensión de un espacio vectorial Antes de ver, propiamente, la definición de dimensión de un espacio vectorial, introducimos el concepto de espacio vectorial de dimensión finita.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. De E diremos es un espacio vectorial de **dimensión finita** si existe algún sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de vectores de E que es sistema de generadores de E. En otro caso, de E diremos es de **dimensión infinita**.

Proposición I.16 *Si $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_p$ son vectores linealmente independientes de un espacio vectorial E de dimensión finita, entonces existe una base de E en la que figuran los vectores $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_p$.*

Demostración Como el espacio vectorial E es de dimensión finita, admite algún sistema de generadores $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$. Si aplicamos el teorema de la base incompleta al sistema $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, que también es de generadores, deducimos existe una base de E en la cual figuran los vectores linealmente independientes $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_p$. C.Q.D.

Nota En las condiciones de esta proposición, se dice que el sistema libre $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p)$ se ha **ampliado** a una base de E. ▲

Todo espacio vectorial de dimensión finita (distinto de $\{0\}$) admite base

Corolario *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, distinto del espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$, entonces admite una base (con un número finito de vectores), y todas sus bases tienen el mismo número de vectores.*

Demostración Como $E \neq \{\mathbf{0}\}$, existe algún vector $\boldsymbol{v}$ de E distinto de $\mathbf{0}$. El vector $\boldsymbol{v}$ es, pues, linealmente independiente, y como consecuencia de la proposición anterior el espacio vectorial E admite alguna base.

Finalmente, que todas las bases de E tienen el mismo número de vectores es una consecuencia de la proposición I.15 (cf. p. 76). C.Q.D.

Dimensión de un espacio vectorial

Dimensión nula

Definición

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$, se llama **dimensión** del espacio vectorial E al número de vectores de cualquiera de sus bases. Se denota: $\dim E$.

Del espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$ se dice tiene **dimensión** 0, o **dimensión nula**. Se escribe: $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Si E es un espacio vectorial de dimensión finita distinto del espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$, y B es una base de E, entonces: $\dim E = \mathrm{Card}(B)$. Nótese que el espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$ no admite base, pues el único sistema posible de vectores de este espacio es: $(\mathbf{0})$, que no es libre.

EJEMPLO 55 El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión 2, pues el sistema $((1,1),(0,1))$ es una base de $\mathbb{R}^2$ (cf. ejemplo 51, p. 72) y está formado por dos vectores: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3, pues su base canónica: $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, tiene tres vectores: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

En general, $\mathbb{R}^n$ es de dimensión n, pues su base canónica:

$$((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)),$$

está formada por n vectores: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Análogamente, el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ es de dimensión n: $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Consecuencias de la definición de dimensión Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, con $\dim E = n$, y $n \geqslant 1$. Se verifica:

- *Si n vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ son generadores de E, entonces el sistema que forman: $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$, es una base de E.*
  Como $\dim E = n > 0$, alguno de los generadores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ es no nulo, y por tanto linealmente independiente. Como consecuencia del teorema de la base incompleta, existe una base de E que es subsistema de $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$. Pero todas las bases

de E tienen n vectores, luego los vectores de tal base deben ser precisamente los n generadores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

- *Si n vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ de E son linealmente independientes, entonces el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E.*

  El sistema libre $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ se puede ampliar hasta una base de E (cf. proposición I.16, p. 77); pero tal base tiene n vectores, luego éstos deben ser los del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
- *Todo sistema de vectores de E formado por más de n vectores es ligado.*

  Si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, sistema de m vectores de E, con $m > n$, fuera libre, también lo sería $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, que por tanto sería una base de E (consecuencia anterior). Pero en tal caso, el vector $\boldsymbol{v}_{n+1}$, por ejemplo, sería igual a una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, lo que contradice que el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ sea libre.
- *El número máximo de vectores linealmente independientes de E es n.*

  No puede ser mayor que n, pues todo sistema con más de n vectores es ligado.
- *Si los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ son generadores de E, es posible escoger entre ellos n vectores linealmente independientes, pero no más de n.*

  Aplicando el teorema de la base incompleta como se hizo en la primera consecuencia, podemos afirmar existe una base de E que es subsistema del sistema de generadores $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$; existen, pues, n vectores linealmente independientes entre los generadores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$. Que no puedan ser más de n se reduce a la consecuencia anterior.

La dimensión de un subespacio vectorial es menor o igual que la de su espacio vectorial

Proposición I.17 *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita y F es un subespacio vectorial de E, entonces F es un espacio vectorial de dimensión finita, y*

$$\dim F \leqslant \dim E.$$

Si además $F \neq E$ (es decir: $F \subset E$), entonces: $\dim F < \dim E$.

Demostración Sea p el máximo número de vectores linealmente independientes de F. Se tiene: $p \leqslant \dim E$, pues también son vectores de E linealmente independientes.

Si $F = \{0\}$, entonces $p = 0$. Y si $F \neq \{0\}$, entonces p vectores de F linealmente independientes forman una base de F, pues si tales vectores no fueran generadores de F, existiría algún vector de F que no sería combinación lineal de ellos, y podríamos encontrar $p + 1$ vectores de F linealmente independientes (cf. ejercicio 5, p. 70). En cualquiera de los dos casos, se verifica que el subespacio vectorial F es un espacio vectorial de dimensión finita igual a p, que es menor o igual que la dimensión de E.

Finalmente, si $F \neq \{0\}$ y $F \subset E$, no puede ocurrir que p sea igual a $\dim E$, pues en tal caso p vectores linealmente independientes de E formarían una base de E, y F sería igual a E. Y si $F = \{0\}$ y $F \subset E$, es obvio que $p < \dim E$. En consecuencia, si $F \subset E$, podemos escribir: $p = \dim F < \dim E$. C.Q.D.

Corolario *Si $F \subseteq E$ y $\dim F = \dim E$, entonces $F = E$.*

Demostración Si F no fuera igual a E, entonces F estaría estrictamente contenido en E, y la dimensión de F sería menor que la de E, en contra de la hipótesis. C.Q.D.

I.10 RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

1. Definición de rango de un sistema de vectores El rango de un sistema de vectores se define como la dimensión del subespacio vectorial que generan:

Rango de un sistema de vectores (o rango de unos vectores)

Definición

Consideremos un espacio vectorial E de dimensión finita. Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ son vectores de E, se define el **rango** de estos vectores, o el rango del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, que se denota: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, como la dimensión del subespacio vectorial $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de E:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\,.$$

Consecuencias de la definición de rango Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con $\dim E = n$, y sean $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ vectores de E. Se verifica:

- *Si* $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = p$, *entonces p es el número máximo de vectores linealmente independientes que figuran entre los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$.*
  Si $p \geqslant 1$, esto es: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = p \geqslant 1$, de las consecuencias de la definición de dimensión se deduce el resultado. Si $p = 0$, es decir: $\dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = 0$, entonces los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ son todos nulos, y no hay entre ellos vectores linealmente independientes.
- $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \leqslant m$, *y este rango es igual a m precisamente si los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ son linealmente independientes.*
  Se deduce inmediatamente de la consecuencia anterior.
- $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \leqslant \dim E$.
  En efecto, en un espacio vectorial de dimensión $\dim E = n$ no hay más de n vectores linealmente independientes.
- *Si $\boldsymbol{w}$ es igual a una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$, es decir, si $\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m$ para unos escalares α_1, α_2, ..., α_m, entonces:* $\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.
  Es consecuencia de que $L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.
- *Si los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ son generadores de E, entonces su rango es igual a la dimensión de E.*
  Pues: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \dim E$.

- *Si α es un escalar no nulo y en el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ sustituimos el vector $\boldsymbol{v}_i$ (con $1 \leqslant i \leqslant m$) por $\alpha\boldsymbol{v}_i$, entonces el sistema resultante tiene el mismo rango que el primero; es decir:*

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m).$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{K}(\alpha\boldsymbol{v}_i) = \mathbb{K}\boldsymbol{v}_i$ (al ser α no nulo), se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m) &= \dim L(\boldsymbol{v}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m)\\ &= \dim(\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mathbb{K}(\alpha\boldsymbol{v}_i) + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_m)\\ &= \dim(\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_i + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_m)\\ &= \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m).\end{aligned}$$

- *Si en el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ permutamos entre sí dos vectores, por ejemplo: $\boldsymbol{v}_i$ y $\boldsymbol{v}_j$, entonces el sistema resultantetiene el mismo rango que el primero. Esto es:*

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_m) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}\left(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_m\right) &= \dim(\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_i + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_j + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_m)\\ &= \dim(\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_j + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_i + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_m)\\ &= \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_m).\end{aligned}$$

- $\operatorname{rango}(\mathbf{0}) = 0$.
  Pues: $\operatorname{rango}(\mathbf{0}) = \dim L(\mathbf{0}) = \dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

EJEMPLO 56 Si $\boldsymbol{v}$ es un vector de un espacio vectorial E, entonces el rango del sistema $(\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{v})$ es:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{v}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \boldsymbol{v} = \mathbf{0},\\ 1, & \text{si } \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}.\end{cases}$$

EJEMPLO 57 El rango de los vectores $(1,-1,1)$, $(1,0,-1)$ y $(2,4,-10)$ de $\mathbb{R}^3$ es igual a 2.

En efecto. Como los vectores $(1,-1,1)$ y $(1,0,-1)$ son linealmente independientes, y el vector $(2,4,-10)$ es combinación lineal de ellos:

$$-4(1,-1,1) + 6(1,0,-1) = (2,4,-10),$$

el máximo número de vectores linealmente independientes entre los vectores dados es dos; podemos escribir:

$$\operatorname{rango}((1,-1,1),(1,0,-1),(2,4,-10)) = 2.$$

EJERCICIO 8 *Estudiar según los valores de a, b y c el rango de los vectores $(1,0,a)$, $(b,0,-1)$ y $(0,c,c)$ de $\mathbb{R}^3$.* ▲

El rango no varía si se suma a un vector una combinación lineal de los demás

Proposición I.18 *No se modifica el rango de un sistema de vectores al sustituir uno de ellos por la suma de él mismo y una combinación lineal de los restantes.*

Demostración Sea $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ un sistema de vectores de un espacio vectorial E, y elijamos en él un vector, por ejemplo: $\boldsymbol{v}_1$, y si $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, son escalares, consideremos el vector:

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n, \tag{31}$$

y por tanto:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' - (\alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n). \tag{32}$$

De (31) se deduce: $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, y por tanto (cf. ejercicio 6, p. 72):

$$L(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n); \tag{33}$$

a su vez, de (32) se deduce: $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq L(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, y por tanto:

$$L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \subseteq L(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n). \tag{34}$$

De (33) y (34) se obtiene: $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = L(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, y en consecuencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) &= \dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &= \dim L(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n),\end{aligned}$$

y en conclusión:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

C.Q.D.

El rango disminuye en 1 si se extrae un vector que no es combinación lineal de los demás

Proposición I.19 *Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial E de dimensión finita, y $\boldsymbol{w}$ es un vector de E que no es igual a una combinación lineal de ellos, entonces:*

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + 1.$$

Demostración Designemos por p el rango de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Si $p = 0$, entonces $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \ldots = \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$, y puesto que $\boldsymbol{w}$ no es combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, se tiene: $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$, y

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{w}) = 1 = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + 1.$$

Si $p \geqslant 1$, entonces hay p vectores linealmente independientes entre los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, y no más de p; podemos suponer, sin pérdida de generalidad, son los p primeros: $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$. De esta forma se tiene: $L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p)$, y de acuerdo con el ejercicio 6(e) (cf. p. 72), podemos escribir:

$$L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p),$$

de donde:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p). \tag{35}$$

Ahora, como $\boldsymbol{w}$ no es igual a una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, tampoco es igual a una de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p$, así que el sistema $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p)$ es libre (cf. ejercicio 5, p. 70), y se tiene:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p) = p + 1. \tag{36}$$

Finalmente, de (35) y (36) se concluye:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p) = p + 1 = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) + 1.$$

C.Q.D.

2. Ejemplos de cálculo de rangos Las proposiciones I.18 y I.19 permiten calcular en la práctica el rango de un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$. Veamos con un ejemplo el procedimiento.

Calculemos el rango de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (2, 1, 1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (-1, 0, 2).$$

En primer lugar, elijamos un vector cuya primera componente sea no nula; por ejemplo: $\boldsymbol{v}_1$.

A continuación, consideramos el vector:

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{v}_1,$$

donde α es un escalar tal que la primera componente de $\boldsymbol{v}'_2$ es nula. Nos sirve $\alpha = -2$:

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_1 = (0, -1, 1);$$

de acuerdo con la proposición I.18 (cf. p. 82) se tiene:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4). \tag{37}$$

Análogamente, definimos los vectores $\boldsymbol{v}'_3$ y $\boldsymbol{v}'_4$ a partir de $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$, respectivamente, y sirviéndonos de $\boldsymbol{v}_1$ para conseguir que la primera componente resulte nula:

$$\boldsymbol{v}'_3 = \boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_1 = (0, 0, 1),$$

$$\boldsymbol{v}'_4 = \boldsymbol{v}_4 + \boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 2).$$

Aplicando dos veces consecutivas la proposición I.18, se obtiene:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_4) = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_4'),$$

y con (37) se deduce:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rango}((1,1,0),(2,1,1),(0,0,1),(-1,0,2))\\ &\qquad = \operatorname{rango}((1,1,0),(0,-1,1),(0,0,1),(0,1,2)).\end{aligned}$$

Los vectores $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{v}_3'$ y $\boldsymbol{v}_4'$, es decir: $(0,-1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,2)$, tienen su primera componente nula, y por tanto lo mismo le ocurrirá a cualquier combinación lineal de ellos. En particular, el vector $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)$ no será combinación lineal de $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{v}_3'$ y $\boldsymbol{v}_4'$. En consecuencia, y de acuerdo con la proposición I.19 (cf. p. 82):

$$\begin{aligned}&\operatorname{rango}((1,1,0),(0,-1,1),(0,0,1),(0,1,2))\\ &\qquad = 1 + \operatorname{rango}((0,-1,1),(0,0,1),(0,1,2)).\end{aligned}$$

Ahora, llevamos a cabo un procedimiento análogo con los vectores $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{v}_3'$ y $\boldsymbol{v}_4'$: como sus primeras componentes son nulas, buscamos uno de ellos que tenga no nula su segunda componente, por ejemplo: $\boldsymbol{v}_2'$, y sirviéndonos de él obtenemos de los restantes vectores, esto es, de $\boldsymbol{v}_3'$ y $\boldsymbol{v}_4'$, vectores cuya segunda componente sí sea nula. Definimos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_3'' &= \boldsymbol{v}_3' + 0\boldsymbol{v}_2' = (0,0,1),\\ \boldsymbol{v}_4'' &= \boldsymbol{v}_4' + \boldsymbol{v}_2' = (0,0,3),\end{aligned}$$

y de acuerdo con las proposiciones I.18 y I.19, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}((0,-1,1),(0,0,1),(0,1,2)) &= \operatorname{rango}((0,-1,1),(0,0,1),(0,0,3))\\ &= 1 + \operatorname{rango}((0,0,1),(0,0,3)).\end{aligned}$$

El vector $\boldsymbol{v}_3''$, es decir: $(0,0,1)$, tiene no nula su tercera componente. Si consideramos: $\boldsymbol{v}_4''' = \boldsymbol{v}_4'' - 3\boldsymbol{v}_3'' = (0,0,0)$, se cumple:

$$\operatorname{rango}((0,0,1),(0,0,3)) = 1 + \operatorname{rango}((0,0,0)) = 1 + 0 = 1.$$

Finalmente, recapitulando lo obtenido:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) &= 1 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_4')\\ &= 2 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_3'', \boldsymbol{v}_4'')\\ &= 3 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_4''') = 3.\end{aligned}$$

EJEMPLO 58 Calculemos el rango de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{v}_1 = (0,0,1,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,-1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,-1,2,1),$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_5 = (0,2,1,1).$$

La primera componente de todos estos vectores es nula. Buscamos, pues, alguno que tenga la segunda no nula. Por ejemplo: $\boldsymbol{v}_2$. Sirviéndonos de $\boldsymbol{v}_2$, obtenemos los vectores:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_1 &= \boldsymbol{v}_1 &&= (0,0,1,0),\\
\boldsymbol{v}'_3 &= \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 &&= (0,0,3,0),\\
\boldsymbol{v}'_4 &= \boldsymbol{v}_4 &&= (0,0,0,0),\\
\boldsymbol{v}'_5 &= \boldsymbol{v}_5 - 2\boldsymbol{v}_2 &&= (0,0,-1,3),
\end{aligned}$$

y aplicando las proposiciones I.18 (cf. p. 82) y I.19 (cf. p. 82):

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5) = 1 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}'_3,\boldsymbol{v}'_4,\boldsymbol{v}'_5).$$

La tercera componente del vector $\boldsymbol{v}'_1$ no es nula: a partir de él definimos los vectores del siguiente paso:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}''_3 &= \boldsymbol{v}'_3 - 3\boldsymbol{v}'_1 &&= (0,0,0,0),\\
\boldsymbol{v}''_4 &= \boldsymbol{v}'_4 &&= (0,0,0,0),\\
\boldsymbol{v}''_5 &= \boldsymbol{v}'_5 + \boldsymbol{v}'_1 &&= (0,0,0,3),
\end{aligned}$$

de donde se deduce: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}'_3,\boldsymbol{v}'_4,\boldsymbol{v}'_5) = 1 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}''_3,\boldsymbol{v}''_4,\boldsymbol{v}''_5)$.

Sólo hay un vector con la siguiente componente no nula: $\boldsymbol{v}''_5$, y por tanto:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}''_3,\boldsymbol{v}''_4,\boldsymbol{v}''_5) = 1 + \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}''_3,\boldsymbol{v}''_4) = 1 + 0 = 1,$$

y recapitulando: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5) = 3$.

I.11 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 41) Sea $\mu \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2) \in \mathbb{R}(a,b) &\iff x_1 = \lambda a \text{ y } x_2 = \lambda b \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}\\
&\iff x_1 = \lambda'(\mu a) \text{ y } x_2 = \lambda'(\mu b) \quad \text{para algún } \lambda' \in \mathbb{R}\\
&\iff (x_1,x_2) \in \mathbb{R}(\mu a,\mu b),
\end{aligned}$$

donde $\lambda' = \lambda/\mu$.

Este resultado puede generalizarse a un espacio vectorial cualquiera: si w es un vector de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y μ es un escalar distinto de 0, entonces se verifica: $\mathbb{K}(\mu w) = \mathbb{K}w$. La prueba es análoga a la efectuada en el párrafo anterior.

Ejercicio 2 (p. 66) El sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ es ligado precisamente si existen tres escalares α, β y γ, no todos nulos, tales que:

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,a) + \gamma(0,a,1) = (0,0,0),$$

o bien:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma a = 0, \quad \beta a + \gamma = 0. \tag{38}$$

Supongamos que α, β y γ son tres números que verifican (38). De la segunda igualdad se obtiene: $\beta = -\gamma a$, que sustituido en la tercera nos da: $-\gamma a^2 + \gamma = 0$, o bien: $\gamma(1 - a^2) = 0$.

Si $1 - a^2 \neq 0$, de la igualdad anterior se deduce que $\gamma = 0$, y sustituyendo en (38) se obtiene que $\alpha = \beta = 0$. De esta forma, si $1 - a^2 \neq 0$, los escalares α, β y γ son necesariamente nulos, y por tanto los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,a)$ y $(0,a,1)$ no son linealmente dependientes, o lo que es lo mismo: el sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ no es ligado.

Analicemos ahora qué ocurre si $1 - a^2 = 0$, es decir, si $a = 1$ o $a = -1$. En el caso en que $a = 1$, las igualdades de (38) se reducen a:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0,$$

las cuales son verificadas —por ejemplo— por $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\gamma = -1$. En consecuencia, en el caso en que $a = 1$, los vectores $(1,0,0)$, $(0,a,1)$ y $(0,1,a)$ son linealmente dependientes, pues hemos encontrado tres escalares no todos nulos —precisamente: 0, 1 y -1—, que verifican: $0(1,0,0) + 1(0,a,1) + (-1)(0,1,a) = (0,0,0)$.

Un análisis análogo nos mostraría que en el caso en que $a = -1$ también es ligado el sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$.

Recapitulando: el sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ es un sistema ligado precisamente si $a = 1$ o $a = -1$.

Ejercicio 3 (p. 69) Concluye el ejercicio 2 con la afirmación de que el sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ es ligado precisamente si $a = 1$ o $a = -1$. Este sistema $((1,0,0),(0,1,a),(0,a,1))$ es entonces libre precisamente si $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

Ejercicio 4 (p. 70) La condición es necesaria. Supongamos que w no es igual a una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y β escalares tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w = 0.$$

Si ocurriera que β es no nulo, de esta igualdad podríamos deducir:

$$w = \beta^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n),$$

lo que establecería que w es combinación lineal de v_1, v_2, ..., v_n, en contra de lo supuesto. Por tanto, necesariamente se tiene: $\beta = 0$.

La condición es también suficiente. Supongamos que de cualquier igualdad de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w = 0$ se deduce que $\beta = 0$. Si w fuera igual a una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, es decir, si $w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$ para algunos escalares $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, se verificaría:

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n + \beta w = 0 \tag{39}$$

para $\beta = -1$, y llegaríamos a una contradicción, pues de verificarse (39) debería deducirse que $\beta = 0$.

Ejercicio 5 (p. 70) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y β escalares tales que:

$$\beta w + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0. \tag{40}$$

Como el vector w no es igual a una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de (40) se deduce: $\beta = 0$ (cf. ejercicio 4, p. 70), y por tanto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, de donde se infiere son nulos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pues los vectores v_1, $v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes. En consecuencia, de la igualdad (40) se deduce: $\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, lo que establece que el sistema $(w, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es un sistema libre.

Ejercicio 6 (p. 72) Se tiene:

a) Si $v_j \in A$, entonces podemos escribir: $v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p$, donde: $\alpha_j = 1$ y $\alpha_i = 0$ si $i \neq j$. Todo vector de A es, pues, combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, que es lo mismo que decir que todo vector de A pertenece a $L(A)$: $A \subseteq L(A)$.

Nota bene Puede ocurrir: $A = L(A)$, como sucede si $A = (0)$. ▲

b) Si $A \subseteq F$, entonces $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores del subespacio vectorial F, y toda combinación lineal de ellos pertenece a F, es decir: $L(A) \subseteq F$.

c) Es un caso particular de (b), tomando: $F = L(B)$.

d) Se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$(A \text{ es subsistema de } B) \overset{(a)}{\Longrightarrow} A \subseteq L(B) \overset{(c)}{\Longrightarrow} L(A) \subseteq L(B).$$

e) Se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$L(A) = L(B) \overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} A \subseteq L(B) \overset{\text{(d)}}{\Longrightarrow} A \subseteq L(B, (\boldsymbol{u}))$$
$$\overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} A \cup \{\boldsymbol{u}\} \subseteq L(B, (\boldsymbol{u})) \overset{\text{(c)}}{\Longrightarrow} L(A, (\boldsymbol{u})) \subseteq L(B, (\boldsymbol{u})),$$

y análogamente se demostraría: $L(B, (\boldsymbol{u})) \subseteq L(A, (\boldsymbol{u}))$.

f) Se tiene: A es subsistema de B, $B \subseteq E$ y $L(A) = E$, y como consecuencia:

$$E = L(A) \subseteq L(B) \subseteq E,$$

de donde: $L(B) = E$, es decir: B es un sistema de generadores de E.

Ejercicio 7 (p. 72) Supongamos, por ejemplo, que $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{B}'$. Entonces cada vector de $\boldsymbol{B}$ figura en la base B', y existe algún vector de B' —consideremos que es $\boldsymbol{w}_1$— que no pertenece a $\boldsymbol{B}$.

Como B es una base de E, el vector $\boldsymbol{w}_1$ es una combinación lineal de los elementos de B: $\boldsymbol{w}_1 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{v}_p$, de donde:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_p\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}.$$

Pero esta última igualdad es una forma de expresar que $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1)$ es un sistema ligado, en contradicción con el hecho de que $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1)$ es un sistema libre (al ser subsistema del sistema libre B').

Un argumento análogo demostraría que no puede ocurrir que $\boldsymbol{B}'$ esté estrictamente contenido en $\boldsymbol{B}$.

Ejercicio 8 (p. 82) Denotemos por r el rango de los vectores $(1, 0, a)$, $(b, 0, -1)$ y $(0, c, c)$, es decir: $r = \operatorname{rango}((1, 0, a), (b, 0, -1), (0, c, c))$.

En primer lugar, observamos que $(1, 0, a)$ y $(b, 0, -1)$ son linealmente independientes precisamente si $ab \neq -1$. De esta forma, si $ab = -1$, entonces:

$$r = \operatorname{rango}((1, 0, a), (b, 0, -1), (0, c, c)) = \operatorname{rango}((1, 0, a), (0, c, c)),$$

y así r es igual a 1 si $c = 0$, y es igual a 2 si $c \neq 0$.

Por otro lado, si $ab \neq -1$, como ya sabemos que $(1, 0, a)$ y $(b, 0, -1)$ son linealmente independientes, sólo nos resta estudiar si el tercer vector: $(0, c, c)$, es igual a una combinación lineal de ellos. Desde luego, si $c = 0$, la respuesta es afirmativa, y se tiene:

$$r = \operatorname{rango}((1, 0, a), (b, 0, -1)) = 2.$$

Si $c \neq 0$, supongamos se verifica la igualdad:

$$\alpha(1, 0, a) + \beta(b, 0, -1) + \gamma(0, c, c) = (0, 0, 0)$$

(para algunos escalares α, β y γ). Esta igualdad vectorial es equivalente a estas tres igualdades:

$$\alpha + \beta b = 0, \quad \gamma c = 0, \quad \alpha a - \beta + \gamma c = 0,$$

y de la segunda de éstas se obtiene: $\gamma = 0$. El resultado del ejercicio 4 (cf. p. 70) permite inferir que $(0, c, c)$ no es igual a una combinación lineal de $(1, 0, a)$ y $(b, 0, -1)$, y en conclusión:

$$r = \operatorname{rango}\big((1, 0, a), (b, 0, -1), (0, c, c)\big) = 3.$$

Resumimos en el siguiente cuadro lo obtenido en este ejercicio:

	$c = 0$	$c \neq 0$
$ab = -1$	$r = 1$	$r = 2$
$ab \neq -1$	$r = 2$	$r = 3$

RECAPITULACIÓN I

Definición de espacio vectorial Consideramos un conjunto E no vacío y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ conmutativo:

- E **es un espacio vectorial sobre el cuerpo** $\mathbb{K}$ significa: sobre E están definidas:
  - una ley de composición interna que articula E como grupo abeliano;
  - una ley de composición externa para $\mathbb{K}$ que verifica: es asociativa en los elementos de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la operación $+$ de $\mathbb{K}$, distributiva respecto de la operación $+$ de E, y neutra para el elemento 1 de $\mathbb{K}$.

  Se llama a los elementos de E **vectores**; a los de $\mathbb{K}$, **escalares**.
- Propiedades:
  - $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
  - $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$,
  - $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ -\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$,
  - $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \quad \text{o} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$
- $\mathbb{K}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$: al considerar la operación $\cdot$ como operación externa.
- $\mathbb{K}^n$ $(n \geqslant 1)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n),$$
$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n).$$

  En particular: $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
- Dados dos espacios vectoriales E y F sobre $\mathbb{K}$, F^E (conjunto de las aplicaciones de E en F) es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones:
  - adición de aplicaciones: $[f + g](\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$;
  - multiplicación por un escalar: $[\lambda f](\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$.

  El elemento neutro de la adición de aplicaciones se denota: $\boldsymbol{O}$, y verifica: $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_F$ (donde $\boldsymbol{0}_F$ designa el elemento neutro de la adición de vectores de F).
- Para un vector $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$: α_1 es su **primera componente**, α_2 es su **segunda componente**, etc, y α_i es su **i-ésima componente** $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Subespacios vectoriales Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

- **Subespacio vectorial de** E: $F \subseteq E$, F no vacío, y tal que:

$$\Big(\forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in F^2,\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in F\Big) \quad \text{y} \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in F,\ \lambda\boldsymbol{v} \in F).$$

- Propiedades:
  - ◇ si F es subespacio vectorial de E, entonces: $\mathbf{0} \in F$;
  - ◇ todo subespacio vectorial es espacio vectorial;
  - ◇ $\{\mathbf{0}\}$ y E son subespacios vectoriales de E;
  - ◇ $\mathbb{K}\boldsymbol{z} = \{\alpha\boldsymbol{z} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ es subespacio vectorial de E;
  - ◇ la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.
- Condición necesaria y suficiente: F es subespacio vectorial precisamente si: $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in E^2,\ \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} \in F$.
- El conjunto $\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
  Si $(a,b) \neq (0,0)$: $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 = 0\} = \mathbb{R}(-b,a)$.

Suma de subespacios vectoriales Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

- Si $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$ son no vacíos, se define:

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in A \text{ y } \boldsymbol{y} \in B\}.$$

  Caso particular: $\boldsymbol{x} + A = \{\boldsymbol{x}\} + A$.
  Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son subconjuntos no vacíos de E, se define la suma $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ como el conjunto:

$$\{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{x}_1 \in A_1, \boldsymbol{x}_2 \in A_2, \dots, \text{ y } \boldsymbol{x}_n \in A_n\}.$$

- Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son subespacios vectoriales, su suma es subespacio vectorial.
- Dos subespacios vectoriales F y G son **independientes** si: todo vector de $F + G$ se puede obtener de manera única como suma de un vector de F y un vector de G.
  Si F y G son independientes, su suma se llama **suma directa**, y se denota: $F \oplus G$.
  Condición necesaria y suficiente de independencia: F y G son independientes precisamente si: $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
  Dos subespacios vectoriales F y G son **suplementarios** si: son independientes y su suma (directa) es E: $F \oplus G = E$.
- **Combinación lineal** de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ de E: cada vector del subespacio vectorial $\mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_n$.
  Un vector $\boldsymbol{z} \in E$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que: $\boldsymbol{z} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$.
  Toda combinación lineal de vectores de un mismo subespacio vectorial pertenece al subespacio vectorial.

Subespacios afines Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

- **Subespacio afín** de E: $A \subseteq E$, A no vacío, y $A = \boldsymbol{v} + F$, con $\boldsymbol{v} \in E$ y F subespacio vectorial de E.

  Son subespacios afines de E: $\{\boldsymbol{v}\}$ (donde $\boldsymbol{v} \in E$), y cualquier subespacio vectorial de E.
- **Recta** de E: $\boldsymbol{v} + \mathbb{K}\boldsymbol{w}$, donde $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$. Toda recta de E es subespacio afín de E.
- Propiedades:
  - ◇ $(\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{v} + F) \iff (\boldsymbol{w} + F = \boldsymbol{v} + F)$;
  - ◇ $(\boldsymbol{v} + F$ es subespacio vectorial $) \iff (\boldsymbol{v} \in F)$;
  - ◇ si $\boldsymbol{v} + F = \boldsymbol{w} + G$, entonces $F = G$;
  - ◇ la intersección de subespacios afines, si no es vacía, es subespacio afín.
- **Hiperplano** de $\mathbb{R}^n$: dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales no simultáneamente nulos, es el conjunto:

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = d\right\}.$$

  Todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.
- Subespacios afines **paralelos**: $\boldsymbol{v} + F$ y $\boldsymbol{w} + G$ son paralelos si: $F = G$.

  El subespacio afín $\boldsymbol{v} + F$ es **débilmente paralelo** al $\boldsymbol{w} + G$ si: $F \subseteq G$.
- **Combinación afín** de los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ de E: todo vector de la forma: $\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{w}_n$, donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

  Todo vector que es combinación afín de vectores de un mismo subespacio afín pertenece al subespacio afín.

Sistemas de vectores Consideramos un espacio vectorial E:

- **Sistema de vectores** de E: lista, o colección, finita ordenada de vectores de E.

  El sistema S formado por los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ se escribe de esta forma: $S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, y de ellos se dice son los vectores de S.

  El **cardinal** del sistema S es: $\mathrm{Card}(S) = \mathrm{Card}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = n$.
- Que el sistema S es **subsistema** del sistema S' significa: todo vector de S es de S' y no figura en la lista de S más veces que en la de S'.

Vectores linealmente dependientes Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

- Los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de E son **linealmente dependientes**, o bien: el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un **sistema ligado**, si: existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tales que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$.
- Propiedades:
  - ◇ $(\boldsymbol{0})$ es un sistema ligado;
  - ◇ si $\boldsymbol{v} \in E$ y $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $(\boldsymbol{v})$ no es un sistema ligado;

◇ todo sistema en el que figure el vector $\mathbf{0}$ es un sistema ligado;
◇ todo sistema en el que uno de los vectores sea igual a una combinación lineal de los restantes es un sistema ligado;
◇ dados dos vectores: $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{w}$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ es sistema ligado precisamente si $\boldsymbol{w} \in \mathbb{K}\boldsymbol{v}$;
◇ si B' es subsistema de B y B' es sistema ligado, también lo es B.

Vectores linealmente independientes Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

- Los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ de E son **linealmente independientes**, o bien: el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es un **sistema libre**, si: los vectores no son linealmente dependientes, o equivalentemente: de la igualdad $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ se deduce: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
- Propiedades:
  ◇ $(\mathbf{0})$ no es un sistema libre;
  ◇ si $\boldsymbol{v} \in E$ y $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $(\boldsymbol{v})$ es un sistema libre;
  ◇ todo sistema en el que figure el vector $\mathbf{0}$ no es un sistema libre;
  ◇ todo sistema en el que uno de los vectores sea igual a una combinación lineal de los restantes no es un sistema libre;
  ◇ dados dos vectores: $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{w}$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ es sistema libre precisamente si $\boldsymbol{w} \notin \mathbb{K}\boldsymbol{v}$;
  ◇ todo subsistema de un sistema libre también es sistema libre.

Sistemas de generadores. Bases Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y un sistema $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ de vectores de E:

- Notación: $L(B) = L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \mathbb{K}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathbb{K}\boldsymbol{v}_n$.
- **Sistema de generadores** de E: se dice que B es sistema de generadores de E, o que los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ generan E, si: $L(B) = E$.
- **Base** de E: B es base de E significa: B es sistema de generadores de E y B es sistema libre.

  Condición necesaria y suficiente: B es base de E precisamente si todo vector de E se puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores de B.

  Coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ de E en la base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$: los únicos escalares α_1, α_2, ..., α_n tales que: $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$.

  Base **canónica** de $\mathbb{K}^n$: el sistema $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$, con: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

  Las coordenadas de un vector de $\mathbb{K}^n$ en la base canónica son sus componentes.

- **Teorema de la base incompleta**: si B es un sistema de generadores de E y $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$ son vectores de B linealmente independientes, entonces existe una base de E que es subsistema de B y en la que están los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$.
  Si B_1 y B_2 son dos bases de E, entonces: $\mathrm{Card}(B_1) = \mathrm{Card}(B_2)$.

Dimensión Consideramos un espacio vectorial E:

- **Dimensión finita**: que E es de dimensión finita significa admite un sistema de generadores $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.
  En particular, $E = \{\mathbf{0}\}$ es de dimensión finita.
  Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ y es de dimensión finita, admite una base.
- **Dimensión** de E: si $E \neq \{\mathbf{0}\}$, se define como el número de vectores de cualquiera de sus bases (que es el mismo para toda base); si $E = \{\mathbf{0}\}$, se define igual a 0.
  Se denota: $\dim E$.
  Se tiene: $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.
  Propiedades: consideramos $\dim E = n$, con $n \geqslant 1$:
  - ◇ n generadores de E forman una base de E;
  - ◇ n vectores linealmente independientes de E forman una base de E;
  - ◇ todo sistema de vectores de E de cardinal mayor que n es un sistema ligado;
  - ◇ el número máximo de vectores linealmente independientes de E es n;
  - ◇ entre los vectores de un sistema de generadores de E es posible escoger n linealmente independientes, pero no más de n;
  - ◇ todo subespacio vectorial de E es, como espacio vectorial, de dimensión finita menor o igual que n;
    si el subespacio está estrictamente incluido en E, entonces su dimensión es menor que n;
    si un subespacio vectorial de E es de dimensión igual a n, entonces coincide con E.

Rango de un sistema de vectores Consideramos un espacio vectorial E:

- **Rango** del sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, o de los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$: dimensión del subespacio vectorial que estos vectores generan.
  Se denota: $\mathrm{rango}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
  Por definición: $\mathrm{rango}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \dim L(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.
  Se verifica: $\mathrm{rango}\,(\mathbf{0}) = 0$.
- Propiedades: consideramos un sistema B de vectores de E:
  - ◇ el número máximo de vectores linealmente independientes de B coincide con el rango de B;
  - ◇ el rango de B es menor o igual que el cardinal de B, y se da la igualdad si

y sólo si B es sistema libre;

- si $\dim E = n$, entonces el rango de B es menor o igual que n, y se da la igualdad si B es sistema de generadores de E;
- si $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ y el vector $\boldsymbol{w}$ es combinación lineal de los vectores de B, al añadir $\boldsymbol{w}$ a B el rango no varía:
$$\text{rango}\,(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m) = \text{rango}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m);$$
pero si $\boldsymbol{w}$ no es combinación lineal de los vectores de B, al añadir $\boldsymbol{w}$ a B el rango aumenta en 1:
$$\text{rango}\,(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m) = \text{rango}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m) + 1.$$

- No se modifica el rango de unos vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m$ si:
  - se sustituye uno de los vectores: $\boldsymbol{v}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, por $\alpha \boldsymbol{v}_i$, donde $\alpha \neq 0$;
  - se permutan entre sí dos de los vectores;
  - se sustituye uno de los vectores por la suma de él mismo y una combinación lineal de los restantes.

CAPÍTULO II

APLICACIONES LINEALES

ESQUEMA – RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Recordatorio sobre aplicaciones El lector que no esté familiarizado con las aplicaciones o con su manejo puede consultar el apéndice A. No obstante, ofrecemos en esta introducción un repaso de lo más esencial sobre ello.

Recordemos, en primer lugar, que una *aplicación* está definida por un conjunto de *partida*, un conjunto de *llegada*, y una forma de asignar a cada elemento del conjunto de partida un elemento y sólo uno del conjunto de llegada. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $A = \{1,2,3\}$ como el de partida, el conjunto $B = \{a,b\}$ como el de llegada, y asignamos al elemento 1 el a, y a los elementos 2 y 3 el b, tenemos una aplicación del conjunto A en el conjunto B. Si la denotamos por f, escribimos: $f(1) = a$, para dar a entender que al elemento 1 le asignamos el elemento a, y decimos: la *imagen* por la aplicación f de 1 es igual a a (o f *aplica* el elemento 1 en el elemento a); análogamente: $f(2) = b$ y $f(3) = b$.

En segundo lugar, tenemos interés en recordar los conceptos de imagen por una aplicación de un subconjunto del conjunto de partida, y de imagen recíproca por una aplicación de un subconjunto del conjunto de llegada. Lo vemos con un ejemplo. Sea f la aplicación del conjunto $A = \{1,2,3\}$ en el conjunto $B = \{a,b,c\}$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = b$. Si consideramos el subconjunto $A_1 = \{1,2\}$ de A, la imagen por f de sus elementos es: $f(1) = a$ y $f(2) = b$. Se llama *imagen* por f del conjunto A_1 al conjunto formado por estas imágenes, y se denota: $f[A_1]$. Es decir: el conjunto $f[A_1]$ es el formado por aquellos elementos de B que son imagen por f de algún elemento de A_1; en símbolos: $f[A_1] = \{f(x) \mid x \in A_1\} = \{a,b\}$. Si, por ejemplo, $A_2 = \{2,3\}$, entonces $f(2) = f(3) = b$, y $f[A_2] = \{b\}$. Y si consideramos como subconjunto de A el mismo A, obtenemos: $f[A] = \{a,b\}$ (el elemento c no es imagen de ningún elemento de A); al conjunto $f[A]$ se le llama *imagen* de la aplicación f, y se denota: $\operatorname{Im} f$.

Por otra parte, si consideramos el subconjunto $B_1 = \{b,c\}$ de B, todos los elementos de A cuya imagen por f pertenece a B_1 son 2 y 3 (ambos se aplican en b y no hay más que se apliquen en b, y a su vez no hay ninguno que se aplique en c). Se llama *imagen recíproca* por f del conjunto B_1 al conjunto formado por los elementos de A cuya imagen por f pertenece a B_1, y se denota: $f^{-1}[B_1]$; en símbolos: $f^{-1}[B_1] = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\} = \{2,3\}$. Otros ejemplos de imágenes recíprocas son: $f^{-1}[\{a\}] = \{1\}$, $f^{-1}[\{a,b\}] = \{1,2,3\}$ y $f^{-1}[\{c\}] = \emptyset$.

Nota bene Nótese que la palabra *imagen* aparece de cuatro maneras: imagen de un elemento por una aplicación, imagen de un conjunto por una aplicación, imagen de una aplicación, e imagen recíproca de un conjunto por una aplicación. ▲

A continuación, recordemos que una aplicación f de un conjunto A en un conjunto B es *inyectiva* si las imágenes por f de elementos distintos de A son elementos distintos de B; o dicho de otra forma: dos elementos de A que tengan la misma imagen por f son necesariamente iguales. Por ejemplo, si f es la aplicación de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c, d\}$ tal que $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = d$, entonces f es inyectiva, pues no hay dos elementos distintos del conjunto de partida con la misma imagen por f. Sin embargo, la aplicación h, entre los mismos conjuntos, definida por $h(1) = a$, $h(2) = b$ y $h(3) = b$ no es inyectiva, pues hay al menos dos elementos distintos con la misma imagen: $h(2) = h(3) = b$.

Recordemos asimismo que una aplicación f de un conjunto A en un conjunto B es *suprayectiva* si cada elemento de B (conjunto de llegada) es imagen por f de al menos algún elemento de A (conjunto de partida); o expresado de otra forma: si la imagen de f coincide con B. Por ejemplo, la aplicación u del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ en el conjunto $B = \{a, b\}$ definida por $u(1) = b$ y $u(2) = u(3) = a$ es suprayectiva, pues cada elemento en el conjunto de llegada, es decir, en B, es imagen por u de algún elemento de A: $\operatorname{Im} u = B$. Pero la aplicación v, entre los mismos conjuntos, dada por $v(1) = v(2) = v(3) = a$ no es suprayectiva, pues hay al menos un elemento de B —precisamente: b— que no es imagen de ninguno de A: $\operatorname{Im} v = \{a\} \neq B$.

Finalmente, recordemos que una aplicación *biyectiva* es una aplicación inyectiva y suprayectiva a la vez. Por ejemplo, es biyectiva la aplicación f de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c\}$ definida por $f(1) = b$, $f(2) = a$ y $f(3) = c$.

Definición de aplicación lineal En este capítulo estamos interesados en aplicaciones cuyos conjuntos de partida y llegada son espacios vectoriales, y que cumplen ciertos requisitos. Consideremos esta aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (x_1 - 2x_2, x_2 + x_3). \end{array}$$

Esta notación nos informa de lo siguiente: la aplicación f tiene como conjunto de partida $\mathbb{R}^3$, como conjunto de llegada $\mathbb{R}^2$, y la imagen por f de un vector arbitrario (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ es el vector $(x_1 - 2x_2, x_2 + x_3)$ de $\mathbb{R}^2$; por ejemplo:

$$f(1, 0, -1) = (1, -1), \quad f(0, 0, 0) = (0, 0), \quad f(-1, 1/2, 1) = (-2, 3/2).$$

Esta aplicación verifica estas propiedades:

- cualesquiera que sean los vectores (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) de $\mathbb{R}^3$, se tiene: $f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$, esto es: la imagen de la suma de dos vectores del espacio vectorial de partida (en este caso, $\mathbb{R}^3$) es igual a la suma de sus imágenes, que son vectores del espacio vectorial de llegada (en este caso, $\mathbb{R}^2$);

- cualesquiera que sean el vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ y el número real α, se cumple: $f(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = \alpha f(x_1, x_2, x_3)$, es decir: la imagen del producto de un número real por un vector de $\mathbb{R}^3$ es igual al producto del número por la imagen del vector (en $\mathbb{R}^2$).

La comprobación de estas dos propiedades es sencilla, y totalmente análoga a la que se lleva a cabo en el ejemplo 1 (cf. p. 113). Por verificarlas, se dice que la aplicación f es una *aplicación lineal*.

Nota Podríamos haber presentado la aplicación f de esta otra forma: la aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que verifica: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 - x_3)$. Esta notación, quizá más sencilla, es general, no exclusiva de las aplicaciones lineales.[1] Veremos más adelante otras formas de *determinar* una aplicación lineal que sí son específicas para aplicaciones lineales. ▲

Queremos comentar cómo es toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$: es tal que la imagen de un vector arbitrario (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ que es de la forma $(ax_1 + bx_2 + cx_3, a'x_1 + b'x_2 + c'x_3)$, para algunos números reales a, b, c, a', b' y c'. Es decir:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (ax_1 + bx_2 + cx_3, a'x_1 + b'x_2 + c'x_3), \end{array}$$

para algunos números reales a, b, c, a', b' y c'. Por ejemplo, son lineales las aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definidas de esta manera:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 0), \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1, 5x_3),$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = (2x_3, x_1 - 3x_2 + 9x_3), \quad f_4(x_1, x_2, x_3) = (0, 0);$$

y no son lineales las definidas de esta otra:

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1), \quad g_2(x_1, x_2, x_3) = (x_2 x_3, x_1 + 2x_3),$$
$$g_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_1 - 3x_3), \quad g_4(x_1, x_2, x_3) = (1, 0).$$

Estos comentarios sobre cómo son las aplicaciones lineales se generalizan sin dificultad a aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Por ejemplo, toda aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ está definida de la forma:

$$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, a'x_1 + b'x_2, a''x_1 + b''x_2),$$

para algunos números reales a, b, a', b', a'', y b''; algunas aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ son las definidas por:

$$h_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2, x_1), \quad h_2(x_1, x_2) = (-x_2, 0, 5x_1 - x_2/2),$$
$$h_3(x_1, x_2) = (0, 0, x_1 + x_2), \quad h_4(x_1, x_2) = (x_1, x_1, x_1).$$

---

[1] En el citado apéndice A se pueden encontrar otras notaciones generales para aplicaciones.

Propiedades de una aplicación lineal En esta sección se detallan propiedades generales de las aplicaciones lineales. La más sencilla establece que toda aplicación lineal aplica el vector nulo del espacio vectorial de partida en el vector nulo del espacio vectorial de llegada. Por ejemplo, si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, la imagen por f del vector $(0,0,0)$ es el vector $(0,0)$; en símbolos: $f(0,0,0) = (0,0)$.

Otra propiedad compara el rango de un sistema de vectores con el rango del sistema formado por las imágenes de tales vectores por una aplicación lineal: el primer rango es mayor o igual que el segundo. Por ejemplo, el sistema $((1,2),(0,1),(1,1))$, de vectores de $\mathbb{R}^2$, tiene rango igual a 2, y si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cualquiera, el sistema $(f(1,2), f(0,1), f(1,1))$, que está formado por vectores de $\mathbb{R}^3$, tiene rango a lo más igual a 2.

Una propiedad muy importante establece que la imagen por una aplicación lineal de un subespacio vectorial (del espacio de partida) es a su vez un subespacio vectorial (del espacio de llegada). Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, al calcular la imagen por f de cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, obtenemos un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. En particular, la imagen del propio $\mathbb{R}^3$, es decir, la imagen de la aplicación lineal f: $\operatorname{Im} f$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. El subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$ es de especial importancia, como veremos más adelante.

Otra propiedad, también muy importante, es análoga de la anterior para imágenes recíprocas: la imagen recíproca por una aplicación lineal de un subespacio vectorial (del espacio de llegada) es a su vez un subespacio vectorial (del espacio de partida). Dada una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, la imagen recíproca por f de cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Una imagen recíproca interesa especialmente: la del subespacio vectorial formado por el vector nulo, es decir: $f^{-1}[\{(0,0)\}]$. Este conjunto, subespacio vectorial del espacio vectorial de partida (en este caso $\mathbb{R}^3$), se denomina *núcleo* de la aplicación lineal f, y se denota: $\operatorname{Ker} f$. En símbolos:

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}[\{(0,0)\}] = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1,x_2,x_3) = (0,0)\}.$$

Nótese que el núcleo de f tiene al menos un elemento: el vector nulo.

Veamos un ejemplo. Consideremos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$. La imagen de f es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ formado por los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son imagen por f de alguno de $\mathbb{R}^3$, es decir, son aquellos vectores (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (a,b) \quad \text{para algún } (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La igualdad $f(x_1,x_2,x_3) = (a,b)$ es equivalente a $(x_1 + x_2, x_3) = (a,b)$, lo que es a su vez equivalente a las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{y} \quad x_3 = b;$$

es fácil obtener una solución: $x_1 = 0$, $x_2 = a$ y $x_3 = b$ (aunque hay más soluciones), con lo que efectivamente es posible encontrar, para cada vector (a, b) de $\mathbb{R}^2$, algún vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (a, b)$; por ejemplo, nos sirve: $(x_1, x_2, x_3) = (0, a, b)$. La imagen de la aplicación f es, entonces, $\mathbb{R}^2$: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Por otra parte, el núcleo de la aplicación lineal f es el conjunto de los vectores (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen por f es igual al vector nulo: $(0, 0)$, es decir: $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$. Esta última igualdad es equivalente en este ejemplo a esta otra: $(x_1 + x_2, x_3) = (0, 0)$, a su vez equivalente a las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = 0.$$

Podemos afirmar, entonces, que el núcleo de f es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x_1 + x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, es decir:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \ \text{y} \ x_3 = 0\}.$$

Otro ejemplo: la aplicación lineal g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2).$$

Su imagen está formada por aquellos vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$g(x_1, x_2) = (a, b, c) \quad \text{para algún } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

es decir: $x_1 = a$, $x_2 = b$ y $x_1 + x_2 = c$. Estas tres ecuaciones admiten una solución simultánea si y sólo si $a + b = c$ (y tal solución sería: $x_1 = a$ y $x_2 = b$), esto es, sólo hay solución para los vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ cuya tercera componente es igual a la suma de las dos primeras. La imagen de g es, pues, el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $y_3 = y_1 + y_2$; en símbolos:[2]

$$\operatorname{Im} g = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = y_1 + y_2\}.$$

Por otra parte, el núcleo de g está formado por los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya imagen es igual a $(0, 0, 0)$, es decir, por aquellos (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tales que $g(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, lo que es equivalente a las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Obviamente, sólo un vector de $\mathbb{R}^2$: el vector nulo, verifica simultáneamente estas ecuaciones: $(x_1, x_2) = (0, 0)$. En consecuencia: $\operatorname{Ker} g = \{(0, 0)\}$.

[2] Quizá el lector esperaba encontrarse con la ecuación de este subespacio vectorial escrita de esta forma: $x_3 = x_1 + x_2$. Tanto da: las letras que usemos son indiferentes siempre que quede claro a qué componente se refiere cada una. Los conjuntos $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = y_1 + y_2\}$ y $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2\}$ son el mismo.

En general, interesa *determinar* la imagen de una aplicación lineal en el sentido de saber si coincide o no con el espacio vectorial de llegada, y en caso negativo conocer una ecuación o ecuaciones que la determinen, y conocer también una base. En lo que concierne al núcleo de una aplicación lineal, interesa saber si coincide o no con el subespacio vectorial (del espacio de partida) formado sólo por el vector nulo, y en caso negativo conocer una ecuación o ecuaciones, y también una base. El método general para resolver estos problemas requiere el manejo de los sistemas de ecuaciones lineales, que no estudiaremos hasta el capítulo IV. Pero más adelante, en este mismo capítulo, veremos algunas herramientas que permitirán atacar estos problemas para muchas aplicaciones lineales sencillas.[3]

Aplicaciones lineales con conjunto de partida un espacio vectorial de dimensión finita Esta sección es especialmente importante, pues las aplicaciones lineales que nos interesan son las que tienen tanto como conjunto de partida como conjunto de llegada algún $\mathbb{R}^n$ (y más particularmente $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, y eventualmente $\mathbb{R}^4$), y todos los $\mathbb{R}^n$ son espacios vectoriales de dimensión finita.

Un concepto que se introduce al principio de la sección es el de *rango* de una aplicación lineal. Es tan útil que es obligado su cálculo para averiguar casi cualquier cosa de la aplicación lineal. El rango de una aplicación lineal (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) se define como la dimensión de su imagen. Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, su rango, que se denota: $\operatorname{rango} f$, es, pues, la dimensión del subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$; en simbolos:

$$\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Para calcularlo, no hay más que tener en cuenta esta propiedad: si calculamos las imágenes por la aplicación lineal de los vectores de una base del espacio vectorial de partida, el sistema de vectores que forman estas imágenes (que es un sistema de vectores del espacio de llegada) tiene por rango precisamente el rango de la aplicación lineal.[4]

Veamos un primer ejemplo con la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida de la forma: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$, de la que ya hablamos en el apartado anterior. La imagen de f, como calculamos en este apartado citado, es $\mathbb{R}^2$, luego su rango es igual a 2: $\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Pero calculémoslo como hemos apuntado, es decir, calculemos el rango del sistema de vectores de $\mathbb{R}^2$ (espacio de llegada) formado por las imágenes por f de una base de $\mathbb{R}^3$ (espacio de partida). Lo más

[3]Por otra parte, las habituales en las pruebas presenciales.

[4]En el texto se demuestra una propiedad más general, en virtud de la cual bastaría un sistema de generadores en vez de una base; es decir: el rango de la aplicación lineal es igual al rango del sistema de vectores formado por las imágenes de los vectores de un sistema de generadores del espacio de partida.

cómodo, habitualmente, es coger la base canónica: $B_C = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$; las imágenes por f de estos tres vectores son estas:

$$f(1,0,0) = (1,0), \quad f(0,1,0) = (1,0) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (0,1);$$

y el rango de la aplicación lineal f es igual al rango del sistema que forman estas imágenes: $\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}\big((1,0),(1,0),(0,1)\big) = 2$.

Estudiemos otro ejemplo: la aplicación lineal g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida de la forma: $g(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$, que también se vio en el apartado anterior. Ahora el espacio vectorial de partida es $\mathbb{R}^2$, de base canónica el sistema $B_C = \big((1,0),(0,1)\big)$; la imagen por g de estos dos vectores es: $g(1,0) = (1,0,1)$ y $g(0,1) = (0,1,1)$, y por tanto:

$$\operatorname{rango} g = \operatorname{rango}\big((1,0,1),(0,1,1)\big) = 2.$$

Recordemos que en el apartado anterior obtuvimos que la imagen de g es el subespacio vectorial $\operatorname{Im} g = \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = y_1 + y_2\}$; ahora nos damos cuenta de que la dimensión de este subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ es igual a 2.

Después de definir el rango, en esta sección se estudia cómo una aplicación lineal queda perfectamente determinada con sólo conocer la imagen por ella de los vectores de una base. Más en concreto, si de una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ sólo conocemos la imagen de los vectores de una base de $\mathbb{R}^n$, como nos digan que tal aplicación es lineal, automáticamente podemos averiguar la imagen de cualquier vector. Veamos con un ejemplo qué se quiere decir. De una aplicación h de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ sabemos que en los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ actúa así:

$$h(1,0,0) = (2,0), \quad h(0,1,0) = (-1,0) \quad \text{y} \quad h(0,0,1) = (0,1).$$

Supongamos que también nos dicen que h es lineal. ¿Hay forma de conocer la imagen por h del vector $(2,-1,3)$, por ejemplo? Sí. El vector $(2,-1,3)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (y además de forma única) así:

$$(2,-1,3) = 2(1,0,0) - (0,1,0) + 3(0,0,1)$$

(recordemos: las coordenadas de un vector en la base canónica coinciden con sus componentes); como h es lineal, de aquí deducimos:

$$\begin{aligned} h(2,-1,3) &= h\big(2(1,0,0) - (0,1,0) + 3(0,0,1)\big) \\ &= 2h(1,0,0) - h(0,1,0) + 3h(0,0,1) \\ &= 2(2,0) - (-1,0) + 3(0,1) = (5,3). \end{aligned}$$

Vemos que el hecho de que h sea lineal nos ha llevado a conocer la imagen del vector $(2,-1,3)$, conocidas las imágenes de los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, que forman una base. Con el mismo procedimiento podríamos averiguar la imagen de cualquier otro vector. Calculemos entonces la imagen de (x_1, x_2, x_3), vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$; sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (que coinciden con sus componentes) son x_1, x_2 y x_3:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1);$$

de aquí, por ser h lineal:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= h(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) \\ &= x_1 h(1,0,0) + x_2 h(0,1,0) + x_3 h(0,0,1) \\ &= x_1(2,0) + x_2(-1,0) + x_3(0,1) \\ &= (2x_1 - x_2, x_3). \end{aligned}$$

Y esto nos permite concluir: la aplicación h es la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida de la forma: $h(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3)$.

Nota En referencia a este último ejemplo, debemos hacer notar que hay infinitas aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que aplican, como h, los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en los vectores $(2,0)$, $(-1,0)$ y $(0,1)$, respectivamente; pero de estas infinitas aplicaciones hay una que es lineal, y sólo una: precisamente h. Ahora cobra sentido la afirmación de que una aplicación lineal queda determinada cuando se conocen las imagénes por ella de los vectores de una base. ▲

Con la aplicación lineal h del ejemplo anterior, hemos encontrado la expresión de $h(x_1, x_2, x_3)$ a partir de las imágenes de los vectores de la base canónica. Si lo que conocemos es la imagen de los vectores de otra base (no necesariamente la canónica), también queda determinada la aplicación lineal. El procedimiento para averiguar la expresión de $h(x_1, x_2, x_3)$ en tal caso habría requerido un paso intermedio adicional (porque las coordenadas de un vector en una base que no sea la canónica no coinciden en general con sus componentes), pero no es más complicado. En el texto figura un ejemplo detallado (cf. p. 123).

A continuación, encontramos en esta sección algunas caracterizaciones de las aplicaciones lineales inyectivas. Dada una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, tenemos varias formas de saber si es inyectiva o no. La primera es examinando su núcleo. Si éste se reduce al subespacio vectorial formado exclusivamante por el vector nulo: $\{(0,0,\ldots,0)\}$, entonces la aplicación es inyectiva, y no lo es en otro caso (es decir, si el núcleo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ distinto del $\{(0,0,\ldots,0)\}$). La aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$ tiene por núcleo (como vimos en el apartado anterior):

$$\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_3 = 0\};$$

como este conjunto no es el $\{(0,0,0)\}$, la aplicación no es inyectiva. La aplicación lineal g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $g(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$, también vista en el apartado anterior, tiene por núcleo: $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$, luego esta aplicación sí es inyectiva.

Otra forma de saber si una aplicación lineal es inyectiva o no requiere el cálculo de su rango: si éste coincide con la dimensión del espacio vectorial de *partida*, la aplicación es inyectiva; si el rango es menor, no es inyectiva. Por ejemplo, las dos aplicaciones f y g de las que hemos hablado en el párrafo precedente tienen ambas el rango igual a 2 (este cálculo se llevó a cabo en el apartado anterior), y para la aplicación f el espacio vectorial de partida es $\mathbb{R}^3$ (dimensión igual a 3, mayor que el rango), y para la g es $\mathbb{R}^2$ (dimensión igual a 2, igual que el rango), lo que confirma que la primera no es inyectiva y la segunda sí.

Seguidamente, se presenta en la sección una caracterización de las aplicaciones lineales suprayectivas. Esta caracterización es sencilla una vez hemos calculado el rango: una aplicación lineal f (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) es suprayectiva si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial de llegada, y no lo es si el rango es menor.

Por ejemplo, consideremos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida de la forma: $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,x_3)$ y la aplicación lineal g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $g(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$, de las cuales venimos hablando en los párrafos precedentes. Ya hemos calculado que ambas aplicaciones lineales tienen el rango igual a 2. En el caso de f, el espacio vectorial de llegada es $\mathbb{R}^2$, de dimensión igual al rango, luego se trata de una aplicación lineal suprayectiva. En el caso de g, el espacio vectorial de llegada es $\mathbb{R}^3$, de dimensión mayor que el rango, luego se trata de una aplicación lineal no suprayectiva.

Esta sección termina con el *teorema de las dimensiones*. Este resultado establece la siguiente propiedad de una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$: la dimensión de su núcleo más la dimensión de su imagen es igual a la dimensión del espacio vectorial de partida; en símbolos:

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^n = n,$$

o equivalentemente (recordando que el rango de la aplicación lineal es la dimensión de su imagen): $\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rango} f = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Veamos algún ejemplo en el que apliquemos este teorema, que servirá a la vez de síntesis de los resultados vistos en esta sección. Consideremos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2, 2x_1+3x_3)$. Calculemos su rango. Las imágenes por f de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son: $f(1,0,0) = (1,2)$, $f(0,1,0) = (-1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,3)$, lo que nos permite escribir:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}((1,2),(-1,0),(0,3)) = 2.$$

Este valor concreto del rango nos informa de lo siguiente:

- la imagen de la aplicación lineal f tiene dimensión igual a 2 (no es más que la definición de rango): $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, así que $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de dimensión 2 del espacio vectorial de llegada, que es $\mathbb{R}^2$; como el único subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 2 es el mismo $\mathbb{R}^2$, se concluye: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$;
- la aplicación lineal f es suprayectiva (podemos deducir esto de dos formas: como consecuencia de que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, o como consecuencia de que el rango es igual a la dimensión del espacio de llegada);
- la aplicación lineal f no es inyectiva (pues su rango es menor que la dimensión del espacio de partida, que es $\mathbb{R}^3$);
- aplicando el teorema de las dimensiones, se obtiene que el núcleo de f tiene dimensión 1: $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 2 = 1$.

Estudiemos otro ejemplo: la aplicación lineal h de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida de la forma $h(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2, x_1)$. Las imágenes por h de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son: $h(1,0) = (2,-1,1)$ y $h(0,1) = (1,-3,0)$, de donde: $\operatorname{rango} h = \operatorname{rango}\big((2,-1,1),(1,-3,0)\big) = 2$. Deducimos lo siguiente:

- la imagen de h tiene dimensión igual a 2, es decir, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (espacio de llegada) de dimensión 2;
- h no es suprayectiva;
- h sí es inyectiva;
- como h es inyectiva, se tiene: $\operatorname{Ker} h = \{(0,0)\}$ (recuérdese que $\operatorname{Ker} h$ es un subespacio vectorial del espacio de partida, en este caso $\mathbb{R}^2$); esta información la vemos confirmada con el teorema de las dimensiones:

$$\dim(\operatorname{Ker} h) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim(\operatorname{Im} h) = 2 - 2 = 0$$

(nótese que el subespacio vectorial $\{(0,0)\}$ es el único de $\mathbb{R}^2$ de dimensión igual a 0).

El espacio vectorial $\mathcal{L}(E,F)$ Con la notación $\mathcal{L}(E,F)$ se designa el conjunto de las aplicaciones lineales del espacio vectorial E en el espacio vectorial F. Por ejemplo, la notación $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ designa el conjunto de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. En esta sección se estudian algunas propiedades de estos conjuntos.

Isomorfismos de espacios vectoriales Un *isomorfismo* es una aplicación lineal biyectiva. Cuando entre dos espacios vectoriales existe algún isomorfismo, se dice que los espacios vectoriales son *isomorfos*. Nosotros nos detenemos sólo en los $\mathbb{R}^n$, para los cuales acontece que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ *no* son isomorfos si $n \neq m$. Por ejemplo, una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, o viceversa, no puede ser de ninguna manera un isomorfismo. Para que una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ pueda ser un isomorfismo, el espacio vectorial de partida y el de llegada han de ser necesariamente el mismo.

Recordando los resultados anteriores sobre aplicaciones lineales inyectivas y suprayectivas, podemos afirmar que una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (ya tomamos iguales el espacio de partida y el de llegada) es un isomorfismo si su rango es igual a la dimensión común del espacio de partida y de llegada, es decir: $\text{rango}\, f = \dim \mathbb{R}^n = n$, y que no es un isomorfismo en caso contrario. Por ejemplo, la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 2x_2)$ verifica:

$$\text{rango}\, f = \text{rango}\,(f(1,0), f(0,1)) = \text{rango}\,((0,1),(1,1)) = 2,$$

y como su rango coincide tanto con la dimensión del espacio de partida como con la dimensión del de llegada, se trata de un isomorfismo. La aplicación lineal g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + x_3, -3x_2, x_1 + x_3)$ no es un isomorfismo, pues:

$$\begin{aligned}\text{rango}\, g &= \text{rango}\,(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)) \\ &= \text{rango}\,((1,0,1),(3,-3,0),(1,0,1)) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Formas lineales Una *forma lineal* sobre $\mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. El conjunto de las formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$ se denomina *espacio dual* de $\mathbb{R}^n$, y se denota: $(\mathbb{R}^n)^*$.

Una forma lineal f sobre $\mathbb{R}^2$ es una aplicación (lineal) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida de la forma: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ para algunos números reales a y b. Por ejemplo, las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son formas lineales:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1;$$

y no son formas lineales estas otras:

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad g_2(x_1, x_2) = 2x_2^3, \quad g_3(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1.$$

Análogamente, una forma lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ es una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida de la forma: $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ para algunos números reales a, b y c. Por ejemplo: $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3$. De la misma manera se extiende este resultado a las formas lineales sobre cualquier $\mathbb{R}^n$.

Es importante enfatizar que una forma lineal aplica vectores en números reales. Por ejemplo la forma lineal f del párrafo anterior aplica vectores de $\mathbb{R}^3$ en números: $f(2,1,0) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$, $f(-1,2,1) = 6$ o $f(-1/2, 3, -1) = -12$.

En el texto se prueba que el espacio dual de $\mathbb{R}^n$: $(\mathbb{R}^n)^*$, es decir, el conjunto de las formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y se prueba que es un espacio vectorial de dimensión igual a n.[5] Las bases de este nuevo espacio vectorial

[5]Por una vez, manejamos un espacio vectorial diferente de los $\mathbb{R}^n$. Las operaciones en este nuevo espacio vectorial son la adición de aplicaciones y la multiplicación de números reales por aplicaciones.

también tienen n elementos, la misma cantidad que todas las bases de $\mathbb{R}^n$, pero tales elementos son formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$.

Fijémonos en $\mathbb{R}^2$ y en su dual: $(\mathbb{R}^2)^*$. Vamos a estudiar un procedimiento para construir una base de $(\mathbb{R}^2)^*$ a partir de una base dada de $\mathbb{R}^2$. Consideremos entonces una base de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo: $B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, donde $\boldsymbol{u}_1 = (1,1)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (1,0)$. Vamos a definir dos formas lineales sobre $\mathbb{R}^2$, que denotaremos por $\boldsymbol{u}_1^*$ y $\boldsymbol{u}_2^*$. La primera: $\boldsymbol{u}_1^*$, se define como aquella forma lineal que aplica cada vector de $\mathbb{R}^2$ en la *primera* coordenada que el vector tenga en la base B. Verbigracia, el vector $(1,2)$ tiene coordenadas 2 y -1 en la base B, pues: $(1,2) = 2(1,1) - (1,0)$; por tanto: $\boldsymbol{u}_1^*(1,2) = 2$. Y el vector $(2,3)$ tiene coordenadas 3 y -1 en la base B: $(2,3) = 3(1,1) - (1,0)$, luego $\boldsymbol{u}_1^*(2,3) = 3$. En general, se tiene: $\boldsymbol{u}_1^*(x_1, x_2) = x_2$, ya que un vector genérico (x_1, x_2) tiene coordenadas x_2 y $x_1 - x_2$ en B: $(x_1, x_2) = x_2(1,1) + (x_1 - x_2)(1,0)$. Análogamente, definimos la forma lineal $\boldsymbol{u}_2^*$ sobre $\mathbb{R}^2$ como aquella que aplica cada vector de $\mathbb{R}^2$ en la *segunda* coordenada que el vector tenga en la base B. Por ejemplo: $\boldsymbol{u}_2^*(1,2) = -1$, $\boldsymbol{u}_2^*(2,3) = -1$, y en general: $\boldsymbol{u}_2^*(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Estas dos formas lineales que acabamos de definir: $\boldsymbol{u}_1^*$ y $\boldsymbol{u}_2^*$, forman una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2)^*$, denominada *base dual* de la base B de $\mathbb{R}^2$, y que se denota: $B^* = (\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*)$.

Veamos otro ejemplo, esta vez con una base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = ((1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)).$$

Denotemos: $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,1)$; la base dual de la base B se denota entonces: $B^* = (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_3^*)$. La forma lineal $\boldsymbol{v}_1^*$, la primera de la base B^*, aplica cada vector de $\mathbb{R}^3$ en la primera coordenada de las tres que el vector tenga en la base B; la forma lineal $\boldsymbol{v}_2^*$, la segunda de la base B^*, aplica cada vector en su segunda coordenada en la base B; y la forma lineal $\boldsymbol{v}_3^*$ lo aplica en su tercera coordenada. Por ejemplo, como: $(1,2,3) = (1,1,0) + (0,1,1) + 2(0,0,1)$, las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la base B son 1, 1 y 2, y por tanto:

$$\boldsymbol{v}_1^*(1,2,3) = 1, \quad \boldsymbol{v}_2^*(1,2,3) = 1 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_3^*(1,2,3) = 2.$$

Y, en general, como: $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,1,0) + (x_2 - x_1)(0,1,1) + (x_1 - x_2 + x_3)(0,0,1)$, resulta que las coordenadas de un vector genérico (x_1, x_2, x_3) en la base B son x_1, $x_2 - x_1$ y $x_1 - x_2 + x_3$, de donde:

$$\boldsymbol{v}_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad \boldsymbol{v}_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_1,$$
$$\text{y} \quad \boldsymbol{v}_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3.$$

Aplicaciones afines Recordemos que los subespacios afines se obtenían sumando un vector a los subespacios vectoriales. En cierto sentido, las *aplicaciones afines* se obtienen de las aplicaciones lineales también sumándoles un vector. Concretando, una aplicación ϕ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ (empezamos con un caso particular para fijar ideas) es una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ para la cual existen un vector (a, b) de $\mathbb{R}^2$ (espacio de llegada) y una aplicación *lineal* f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tales que la imagen por ϕ de cada vector de $\mathbb{R}^3$ se obtiene sumando a su imagen por f el vector (a, b); es decir: para cada $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, se tiene: $\phi(x_1, x_2, x_3) = (a, b) + f(x_1, x_2, x_3)$.

Puede comprobarse que toda aplicación afín de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ es tal que la imagen de un vector arbitrario (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ de la forma:

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d, a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d')$$

para algunos números reales a, b, c, d, a', b', c' y d'. En simbolos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (ax_1 + bx_2 + cx_3 + d, a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'), \end{array}$$

para algunos números reales a, b, c, d, a', b', c' y d'. Verbigracia, son afines las aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por:

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 1, x_1 - 4), \quad \phi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - 5x_3),$$

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = (0, 5x_1 - 2/3), \quad \phi_4(x_1, x_2, x_3) = (1, -6).$$

Y no son afines estas otras:

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, -3x_3 + 4), \quad \psi_2(x_1, x_2, x_3) = (1, x_1x_2),$$

$$\psi_3(x_1, x_2, x_3) = (0, \sqrt{x_3}).$$

Lo dicho sobre cómo son las aplicaciones afines se generaliza sin dificultad a las de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Por ejemplo, son aplicaciones afines de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ las definidas de esta forma:

$$\xi_1(x_1, x_2) = (x_2 - 1, 4x_2 + 3, 5), \quad \xi_2(x_1, x_2) = (0, 6x_1 - \sqrt{2}x_2 - 8/5, 1),$$

$$\xi_3(x_1, x_2) = (x_2 - 7, 3x_1 - 6x_2 + 3/2, x_1 - x_2 + 1).$$

Cuando tenemos una aplicación de la cual sabemos que es afín, podemos estar interesados en calcular el vector del espacio de llegada y la aplicación lineal que la determinan de acuerdo con la definición. Lo primero que debemos saber al respecto es que están *ambos* unívocamente determinados por la aplicación afín. Por ejemplo, la aplicación ϕ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 3, -x_2 + 4)$ es afín (de acuerdo con lo dicho en el párrafo precedente). El vector (a, b) de $\mathbb{R}^2$ determinado por ϕ es precisamente la imagen por ϕ del vector nulo: $(a, b) = \phi(0, 0, 0)$;

II.1 DEFINICIÓN DE APLICACIÓN LINEAL

Consideremos dos espacios vectoriales E y F sobre un *mismo* cuerpo $\mathbb{K}$.

Aplicación lineal

Definición

De una aplicación f de E en F:

$$x \in E \longmapsto f(x) \in F,$$

diremos es una **aplicación lineal** de E en F si verifica:

(L1) $\forall\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E^2,\ f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}),$

(L2) $\forall\ (\alpha, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v}).$

EJEMPLO 1 La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (x_1 + x_2, x_1 + x_3) \end{array} \tag{1}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

Comprobemos que se verifican (L1) y (L2). Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f\big((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\big) \\ &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= \big((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3)\big) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_3) + (y_1 + y_2, y_1 + y_3) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

y (L1) se verifica; y si además α es un número real, entonces:

$$\begin{aligned} f(\alpha \boldsymbol{x}) &= f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_3) \\ &= \big(\alpha(x_1 + x_2), \alpha(x_1 + x_3)\big) \\ &= \alpha(x_1 + x_2, x_1 + x_3) \\ &= \alpha f(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

y también se verifica (L2). En conclusión, la aplicación f definida en (1) es efectivamente una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 2 La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\ g\ } & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \dashrightarrow & (x_1 x_2, 0) \end{array}$$

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que una aplicación lineal conserva las combinaciones lineales, en el sentido siguiente: si f es una aplicación lineal de E en F, y $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son n vectores de E y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son n escalares, entonces:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n). \qquad (2)$$

En efecto. Para $n = 1$ la igualdad (2) se reduce a: $f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1)$, que es verdadera (por (L2)).

Supongamos ahora que la igualdad (2) se verifica para $n-1$ vectores, es decir:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_{n-1} f(\boldsymbol{v}_{n-1}). \quad (3)$$

Entonces, poniendo $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}$, se tiene:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) \\ &\qquad = f(\boldsymbol{v} + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) \\ &\qquad = f(\boldsymbol{v}) + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &\qquad = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_{n-1} f(\boldsymbol{v}_{n-1}) + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (L3) en las dos últimas igualdades.

Queda así probada la igualdad (2) por el método de inducción (o recurrencia).

II.2 PROPIEDADES DE UNA APLICACIÓN LINEAL

1. Propiedades generales; imagen de una aplicacion lineal En todo lo que sigue, supondremos que E y F son dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y, con el fin de evitar confusiones, representaremos por $\mathbf{0}_E$ el elemento neutro de la adición de vectores de E, y por $\mathbf{0}_F$ el de la adición de vectores de F.

Una aplicación lineal f de E en F verifica las siguientes propiedades:

1) $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
Ya que: $f(\mathbf{0}_E) = f(0\,\mathbf{0}_E) = 0 f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

2) *La imagen del opuesto de un vector es el opuesto de la imagen del vector. Es decir, se verifica:* $\forall\, \boldsymbol{v} \in E,\ f(-\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$.
Pues: $f(-\boldsymbol{v}) = f((-1)\boldsymbol{v}) = (-1)f(\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$.

3) *Si* $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *es un sistema ligado de vectores de* E*, entonces el sistema formado por sus imágenes:* $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$*, es un sistema ligado de vectores de* F.
Si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema ligado, es decir, si podemos encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos nulos, tales que: $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_E$, entonces de (2)

existen, pues, dos vectores $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ de F_1 tales que $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ y $f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$, y si α_1 y α_2 son dos escalares, entonces pertenece a F_1 el vector:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2,$$

y por tanto: $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}[F_1]$, y con la proposición I.1 (cf. p. 39) se concluye que $f^{-1}[F_1]$ es un subespacio vectorial de E.

2. Núcleo de una aplicación lineal Al aplicar la última de las propiedades anteriores al subespacio vectorial $\{\mathbf{0}_F\}$ de F, se obtiene que el conjunto $f^{-1}[\{\mathbf{0}_F\}]$, conjunto formado por los vectores de E cuya imagen por f es igual a $\mathbf{0}_F$, es un subespacio vectorial de E.

Núcleo de una aplicación lineal

Definición

El subepacio vectorial $f^{-1}[\{\mathbf{0}_F\}]$ de E, que se denota: $\operatorname{Ker} f$, se llama **núcleo** de la aplicación lineal f:

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}[\{\mathbf{0}_F\}] = \{\boldsymbol{v} \in E \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_F\}.$$

(La sigla "Ker" es una abreviatura de la palabra inglesa *kernel*, que significa núcleo.)

El conocimiento del núcleo de una aplicación lineal nos permite saber si ésta es o no es inyectiva. Podemos afirmar:

CNS de aplicación lineal inyectiva

Proposición II.2 *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal f de E en F sea inyectiva es:*

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Demostración La condición es necesaria: suponemos que la aplicación f es inyectiva, y probamos que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\operatorname{Ker} f$, esto es: $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F$, entonces, como $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$ (cf. propiedad (1)), se tiene: $f(\boldsymbol{u}) = f(\mathbf{0}_E)$, de lo que se deduce: $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$, pues f es inyectiva. En consecuencia: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

La condición es suficiente: suponemos que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$, y probamos que f es inyectiva. Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son dos vectores de E con la misma imagen: $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$, entonces podemos escribir:

$$\mathbf{0}_F = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

y el vector $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ pertenece a $\operatorname{Ker} f$; pero hemos supuesto que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$, luego $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}_E$, o bien: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. En consecuencia, de suponer que $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ hemos deducido que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Esto es, la aplicación f es inyectiva. (I.D.)

En el capítulo IV veremos un método para determinar el núcleo, y también la imagen, de una aplicación lineal dada.

II.3 APLICACIONES LINEALES CON CONJUNTO DE PARTIDA UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA

1. Una primera propiedad En esta sección consideraremos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y aplicaciones lineales para las cuales el conjunto de partida es un espacio vectorial de dimensión finita no nula.

Un primer resultado en estas condiciones es el siguiente:

> **Proposición II.4** *Si f es una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F, entonces el subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$ es de dimensión finita.*

Demostración Sea $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ un sistema de generadores de E. Entonces el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m))$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$.

En efecto. Si $\boldsymbol{w}$ es un vector arbitrario de $\operatorname{Im} f$, y $\boldsymbol{v} \in E$ es tal que: $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, como $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ es un sistema de generadores de E existen m escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que: $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m$, de donde:

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_m f(\boldsymbol{v}_m),$$

y así $\boldsymbol{w}$ es combinación lineal de los vectores $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$. El sistema de vectores $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m))$ es, pues, un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$.

Al ser $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m))$ un sistema de generadores de $\operatorname{Im} f$, este subespacio vectorial es de dimensión finita. C.Q.D.

Nota La demostración de la proposición anterior habría sido superflua de haber exigido a F ser un espacio vectorial de dimensión finita, pues los subespacios vectoriales de un espacio vectorial de dimensión finita son a su vez de dimensión finita (cf. proposición I.17, p. 79). ▲

2. Rango de una aplicación lineal Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F.

Rango de una aplicación lineal

> **Definición**
>
> Se define el **rango** de la aplicación lineal f, y se denota: $\operatorname{rango} f$, como la dimensión del subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$:
>
> $$\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Sabemos que si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ es un sistema de generadores de E, entonces el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m))$ es de generadores de $\operatorname{Im} f$ (cf. demostración de la

Proposición II.5 *Si f es una aplicación lineal de E en F, ambos espacios vectoriales de dimensión finita, entonces:*

$$\operatorname{rango} f \leqslant \min\{\dim E, \dim F\}.$$

Demostración Por un lado, y teniendo en cuenta la propiedad (5) de las aplicaciones lineales, si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango} f &= \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))\\ &\leqslant \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \dim E.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\operatorname{Im} f \subseteq F$, se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim F.$$

En conclusión: $\operatorname{rango} f \leqslant \dim E$ y $\operatorname{rango} f \leqslant \dim F$, y queda probado el resultado. C.Q.D.

Proposición II.6 *Si f es una aplicación lineal de E en F, y g es una aplicación lineal de F en G, siendo E, F y G tres espacios vectoriales de dimensión finita, entonces:*

$$\operatorname{rango}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rango} f, \operatorname{rango} g\}.$$

Demostración Si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, teniendo en cuenta la propiedad (5) de las aplicaciones lineales se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(g \circ f) &= \operatorname{rango}([g \circ f](\boldsymbol{v}_1), [g \circ f](\boldsymbol{v}_2), \ldots, [g \circ f](\boldsymbol{v}_n))\\ &= \operatorname{rango}(g(f(\boldsymbol{v}_1)), g(f(\boldsymbol{v}_2)), \ldots, g(f(\boldsymbol{v}_n)))\\ &\leqslant \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))\\ &= \operatorname{rango} f,\end{aligned}$$

luego:

$$\operatorname{rango}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rango} f. \tag{4}$$

Por otro lado, se tiene:

$$\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im} g. \tag{5}$$

En efecto, si $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, entonces para algún $\boldsymbol{v} \in E$ se verifica:

$$[g \circ f](\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}, \quad \text{o bien } g(f(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{w},$$

y al ser $\boldsymbol{w}$ la imagen por g de algún vector de F —al menos, de $f(\boldsymbol{v})$—, se tiene: $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} g$; en consecuencia: $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im} g$. De (5) se deduce:

$$\operatorname{rango}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} g) = \operatorname{rango} g,$$

y con (4) se concluye el resultado. C.Q.D.

Esta aplicación f de E en F recién definida verifica (7), pues las coordenadas de cada vector $\boldsymbol{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, en la base B son todas nulas salvo la i-ésima, que es igual a 1, y por tanto: $f(\boldsymbol{v}_i) = 1\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_i$.

La aplicación f también verifica que es lineal. En efecto, si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son dos vectores arbitrarios de E, y si α y β son dos escalares, de las igualdades:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$$

se deduce:

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (\alpha\lambda_1 + \beta y_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta y_n)\boldsymbol{v}_n,$$

luego:

$$\begin{aligned} f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) &= (\alpha\lambda_1 + \beta y_1)\boldsymbol{w}_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta y_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta y_n)\boldsymbol{w}_n \\ &= \alpha(\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \lambda_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{w}_n) + \beta(y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n) \\ &= \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

y en consecuencia: $f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$, y f es lineal.

Finalmente, si g es una aplicación lineal de E en F que verifica:

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1,\ g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2,\ \ldots,\ g(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_n, \tag{8}$$

entonces $f = g$. En efecto, las aplicaciones f y g tienen el mismo espacio vectorial de partida y el mismo de llegada, y si $\boldsymbol{x} \in E$, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base B, es decir: $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n$, entonces, al ser g una aplicación lineal, y teniendo en cuenta (8), se tiene:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &= g(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n) = \lambda_1 g(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 g(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_n g(\boldsymbol{v}_n) \\ &= \lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \lambda_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{w}_n = f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Podemos, pues, escribir: $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, y en conclusión: $g = f$.

Volviendo al ejemplo, podemos entonces asegurar existe una única aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que verifica (6). A continuación, desarrollamos un método para el cálculo concreto de la expresión de $f(x_1, x_2, x_3)$:

a) Escribimos los vectores de la base canónica como combinación lineal de los vectores de la base $B = \big((1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\big)$:

$$\begin{cases} (1,0,0) = 1(1,1,0) + (-1)(0,1,0), \\ (0,1,0) = 1(0,1,0), \\ (0,0,1) = (-1)(1,1,0) + 1(0,1,0) + 1(1,0,1). \end{cases} \tag{9}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ son escalares, se deduce (por ser f lineal):

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{v}_p) = f(\mathbf{0}_E),$$

de donde se infiere (por ser f inyectiva):

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_E,$$

y en consecuencia: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, pues los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ son linealmente independientes. En conclusión, de la igualdad (10) se deduce necesariamente son nulos los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Los vectores $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_p)$ son, pues, linealmente independientes.

Probemos en segundo lugar la implicación: (b) $\Longrightarrow$ (c). Sea: $\dim E = n$. Si $n = 0$, entonces $(\mathbf{0}_E)$ es un sistema de generadores de E, y se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(\mathbf{0}_E)) = \operatorname{rango}(\mathbf{0}_F) = 0 = \dim E.$$

Si $n \geqslant 1$, y $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, entonces:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)); \tag{11}$$

pero al ser los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ linealmente independientes, de acuerdo con la hipótesis también lo son los vectores $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$, y en consecuencia:

$$\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = n. \tag{12}$$

De (11) y (12) se concluye: $\operatorname{rango} f = n = \dim E$.

Probemos a continuación la implicación: (c) $\Longrightarrow$ (d). Lo haremos por reducción al absurdo: supongamos que $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$, con $k \geqslant 1$, es una base de $\operatorname{Ker} f$. Si $\dim E = n$, del teorema de la base incompleta se deduce que el sistema libre $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ se puede extender a una base de E: $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, y por tanto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rango} f &= \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_k), f(\boldsymbol{u}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)) \\
&= \operatorname{rango}(\mathbf{0}_F, \ldots, \mathbf{0}_F, f(\boldsymbol{u}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)) \\
&= \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{u}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)) \\
&\leqslant n - k < n,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, pues por hipótesis se tiene que $\operatorname{rango} f = \dim E = n$. En consecuencia, el subespacio vectorial $\operatorname{Ker} f$ del espacio vectorial de dimensión finita E no admite base, y en conclusión: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

Finalmente, se verifica la implicación: (d) $\Longrightarrow$ (a), como se probó en la proposición II.2 (cf. p. 117).

Una vez hemos probado las cuatro implicaciones anteriores, queda demostrado que las cuatro afirmaciones del enunciado son equivalentes. C.Q.D.

es decir: $(a,b) = (3,4)$. Y la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ determinada por ϕ puede calcularse con la igualdad $f(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1,x_2,x_3) - (a,b)$; esto es:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1,x_2,x_3) - (a,b) &= (2x_1 - x_2 + 3, -x_2 + 4) - (3,4) \\ &= (2x_1 - x_2, -x_2), \end{aligned}$$

y así la aplicación lineal f es la definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, -x_2)$.

Nota bene Una aplicación afín está definida por la suma de un vector del espacio de llegada y una aplicación lineal, y ambos están determinados fijada una aplicación afín concreta. Esto marca una diferencia formal con los subespacios afines: un subespacio afín es la suma de un vector y un subespacio vectorial, pero aunque este último está perfectamente determinado fijado un subespacio afín concreto, no lo está el vector. ▲

En el texto se detallan a continuación algunas propiedades generales de las aplicaciones afines, que son en cierto sentido análogas de algunas propiedades que ya hemos visto de las aplicaciones lineales; las más destacables son las que hacen referencia a la imagen y a la imagen recíproca. La imagen por una aplicación afín de un subespacio *afín* del espacio de partida es a su vez un subespacio afín del espacio de llegada. Y se tiene una propiedad análoga para las imágenes recíprocas: la imagen recíproca por una aplicación afín de un subespacio afín del espacio de llegada es un subespacio afín del espacio de partida, siempre y cuando esa imagen recíproca no sea vacía. Notemos que no había necesidad de tomar esta precaución con las aplicaciones lineales: a la imagen recíproca por una aplicación lineal de un subespacio vectorial pertenece al menos un vector: el nulo.

no es lineal. La condición (L1) no se verifica; por ejemplo:

$$g((1,2)+(3,-1)) = g(4,1) = (4,0),$$

$$g(1,2)+g(3,-1) = (2,0)+(-3,0) = (-1,0).$$

Nota bene Para que se verifique (L1), debe asegurarse que $g((x_1,x_2)+(y_1,y_2))$ es igual a $g(x_1,x_2)+g(y_1,y_2)$ cualesquiera que sean los vectores (x_1,x_2) y (y_1,y_2) de $\mathbb{R}^2$. ▲

EJEMPLO 3 Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la aplicación identidad de E:

$$\boldsymbol{x} \in E \longmapsto \boldsymbol{x} \in E,$$

que se denota: I_E, es una aplicación lineal de E en E.

En efecto. Se verifica (L1), pues dados dos vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ cualesquiera de E, se tiene:

$$I_E(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = I_E(\boldsymbol{v})+I_E(\boldsymbol{w});$$

y también se verifica (L2), pues si α es un escalar, se cumple:

$$I_E(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{v} = \alpha I_E(\boldsymbol{v}).$$

Una caracterización muy utilizada de las aplicaciones lineales es la siguiente:

CNS de aplicación lineal

Proposición II.1 *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación f de un espacio vectorial E en un espacio vectorial F, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, sea lineal es la siguiente:*

(L3) $\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in E^2,\ f(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}) = \alpha f(\boldsymbol{v})+\beta f(\boldsymbol{w}).$

Demostración La condición es necesaria. Si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos vectores de E y α y β son dos escalares, y ponemos: $\boldsymbol{v}' = \alpha\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}' = \beta\boldsymbol{w}$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}) &= f(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}') \\ &= f(\boldsymbol{v}')+f(\boldsymbol{w}') \\ &= f(\alpha\boldsymbol{v})+f(\beta\boldsymbol{w}) \\ &= \alpha f(\boldsymbol{v})+\beta f(\boldsymbol{w}), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (L1) en la segunda igualdad y (L2) en la cuarta. De esta forma, de ser f lineal se deduce (L3).

La condición es suficiente. De (L3) se deduce:

$$f(1\boldsymbol{v}+1\boldsymbol{w}) = 1f(\boldsymbol{v})+1f(\boldsymbol{w}),$$

es decir: $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w})$, y se verifica (L1); por otra parte, de (L3) también se deduce:

$$f(\alpha\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w}) = \alpha f(\boldsymbol{v})+0f(\boldsymbol{w}),$$

es decir: $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$, y se verifica (L2); en conclusión, f es lineal. C.Q.D.

y de la propiedad (1) se deduce:

$$0_F = f(0_E) = f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n),$$

lo que establece que los vectores $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$ son linealmente dependientes, o lo que es lo mismo: el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ es ligado.

4) *Dados n vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ de E, si $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ es un sistema libre de vectores de F, entonces el sistema $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es un sistema libre de vectores de E.*

   Si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ fuese un sistema ligado, entonces también sería ligado el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ (propiedad (3)), en contra de la hipótesis.

5) *Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_m$ son vectores de E, entonces:*

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \geqslant \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)) .$$

   Sea $\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)) = p$. Si $p = 0$, la propiedad es trivial. Si $p \geqslant 1$, hay p vectores —y no más de p— linealmente independientes entre los vectores $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_m)$; si suponemos éstos son los p primeros: $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_p)$, entonces $\left(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\right)$ es un sistema libre (propiedad (4)), y en consecuencia se tiene: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \geqslant p$.

6) *La imagen por f de un subespacio vectorial E_1 de E:*

$$f[E_1] = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in E_1\},$$

   es un subespacio vectorial de F.

   Si $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ son dos vectores de $f[E_1]$, y existen, pues, dos vectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ de E_1 tales que $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ y $f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$, y si α_1 y α_2 son dos escalares, entonces se tiene: $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 \in E_1$, y pertenece a $f[E_1]$ el vector:

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2.$$

   De la proposición I.1 (cf. p. 39) se concluye que $f[E_1]$ es un subespacio vectorial de F.

   Nota bene En particular, la imagen de la aplicación (lineal) f:

$$\operatorname{Im} f = f[E] = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in E\},$$

   es un subespacio vectorial de F. ▲

7) *La imagen recíproca por f de un subespacio vectorial F_1 de F:*

$$f^{-1}[F_1] = \{\boldsymbol{v} \in E_1 \mid f(\boldsymbol{v}) \in F_1\},$$

   es un subespacio vectorial de E.

   El conjunto $f^{-1}[F_1]$ no es el conjunto vacío: al menos $0_E \in f^{-1}[F_1]$, ya que $0_F \in F_1$ y $f(0_E) = 0_F$ (propiedad (1)). Por otra parte, si $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son dos vectores de $f^{-1}[F_1]$, y

3. Inversa de una aplicación lineal biyectiva Si f es una aplicación entre E y F que es biyectiva, está definida su aplicación inversa f^{-1}, de F en E, de forma que se verifica:

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \iff \boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y}),$$

y f^{-1} es a su vez biyectiva.[6] En estas condiciones, si f es lineal, entonces f^{-1} también es lineal.

La inversa de una aplicación lineal biyectiva también es lineal

Proposición II.3 *La aplicación inversa de una aplicación lineal biyectiva es una aplicación lineal biyectiva.*

Demostración Consideremos las notaciones del párrafo precedente al enunciado de esta proposición. Si $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ son dos vectores de F, y α_1 y α_2 son dos escalares, denotando: $\boldsymbol{v}_1 = f^{-1}(\boldsymbol{w}_1)$ y $\boldsymbol{v}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{w}_2)$, o bien: $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ y $f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$, por ser f lineal se tiene:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2,$$

y por tanto:

$$f^{-1}(\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2) = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 = \alpha_1 f^{-1}(\boldsymbol{w}_1) + \alpha_2 f^{-1}(\boldsymbol{w}_2).$$

En consecuencia, se verifica:

$$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) \in F^2,\ f^{-1}(\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2) = \alpha_1 f^{-1}(\boldsymbol{w}_1) + \alpha_2 f^{-1}(\boldsymbol{w}_2),$$

es decir (cf. proposición II.1, p. 114): f^{-1} es una aplicación lineal de F en E. C.Q.D.

4. Composición de aplicaciones lineales Si f es una aplicación lineal de E en F, y g es una aplicación lineal de F en un espacio vectorial G (también espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$), entonces la aplicación compuesta[7] de f y g: $g \circ f$, que verifica:

$$\forall\,\boldsymbol{v} \in E,\ [g \circ f](\boldsymbol{v}) = g\big(f(\boldsymbol{v})\big),$$

es una aplicación lineal de E en G.

En efecto, si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son dos vectores de E, y α y β son dos escalares, se tiene:

$$\begin{aligned}[g \circ f](\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) &= g\big(f(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w})\big)\\ &= g\big(\alpha f(\boldsymbol{v}) + \beta f(\boldsymbol{w})\big)\\ &= \alpha g\big(f(\boldsymbol{v})\big) + \beta g\big(f(\boldsymbol{w})\big)\\ &= \alpha[g \circ f](\boldsymbol{v}) + \beta[g \circ f](\boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

y en consecuencia (cf. proposición II.1, p. 114) $g \circ f$ es lineal.

[6] Puede consultarse, por ejemplo, el apéndice A (cf. p. 397).

[7] Sobre composición de aplicaciones, cf. apéndice A, p. 398.

proposición II.4, p. 119), es decir:

$$L(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_m)) = \operatorname{Im} f,$$

y por tanto:

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim L(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_m)) = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_m)).$$

En consecuencia:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_m));$$

esto es: el rango de f es igual al rango del sistema formado por las imágenes de los vectores de un sistema de generadores de E.

En particular, si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, entonces también podemos escribir:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)).$$

Nota bene Es indiferente el sistema de generadores —o la base— que se elija para calcular el rango de una aplicación lineal. ▲

EJEMPLO 4 Consideremos la aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, x_2, -x_1 - x_2), \end{array}$$

y calculemos su rango.

Tomamos una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$; por comodidad elegimos la base canónica:

$$B_C = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)).$$

Entonces el rango de f es igual al rango de los vectores que son imagen de los de la base B_C:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango} f &= \operatorname{rango}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\ &= \operatorname{rango}((1,0,-1), (0,1,-1), (0,0,0)) = \operatorname{rango}((1,0,-1), (0,1,-1)) = 2. \end{aligned}$$

Notación En las siguientes proposiciones utilizaremos el *mínimo* de dos números reales x y y: se denota: $\min\{x, y\}$, y se define de esta forma:

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} x, & \text{si } x \leqslant y, \\ y, & \text{si } x \geqslant y. \end{cases}$$

Por ejemplo: $\min\{0, -3\} = \min\{-3, 0\} = -3$, y $\min\{1, 1\} = 1$. Una definición equivalente del mínimo de x e y es:

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

▲

3. Caracterización de una aplicación lineal por las imágenes de los vectores de una base Veamos con un ejemplo lo que queremos hacer. Consideremos una aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ de la cual conocemos las imágenes de los vectores de la base $B = ((1,1,0),(0,1,0),(1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$:

$$f(1,1,0) = (2,1), \quad f(0,1,0) = (1,0), \quad f(1,0,1) = (1,2). \tag{6}$$

Hay muchas aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ —de hecho, infinitas— que tienen el mismo comportamiento que f en los vectores de B. Por ejemplo, las aplicaciones f_1, f_2 y f_3 definidas por las expresiones:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2 + 1, x_1x_2 + 2x_3),$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3 + 1, x_1(x_3 + 1)),$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} f(x_1,x_2,x_3), & \text{si } (x_1,x_2,x_3) \text{ es vector de } B, \\ (1,1), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(Se comprueba sin dificultad que estas aplicaciones se comportan igual que f en los vectores de B; adicionalmente, se tiene que estas tres aplicaciones no son lineales, lo cual puede comprobarse observando que ninguna de ellas verifica que la imagen de $(0,0,0)$ es $(0,0)$.) Pero entre todas las aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que se comportan igual que f en los vectores de la base B, *hay una* que es lineal, y *sólo hay una*. Es una consecuencia del siguiente resultado teórico.

Una aplicación lineal está totalmente determinada conocidas las imágenes de los vectores de una base

Proposición II.7 *Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita. Si el sistema $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, y si $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n$ son n vectores de F, entonces existe una aplicación lineal f de E en F tal que:*

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1,\ f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2,\ \dots,\ f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_n; \tag{7}$$

y además f es única, en el sentido siguiente: si g es una aplicación lineal de E en F que se comporta igual que f en los vectores de la base B, es decir, si la aplicación lineal g es tal que: $g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$, $g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2, \dots, g(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_n$ entonces $f = g$.

Demostración Sea $\boldsymbol{x}$ un vector arbitrario de E. Como $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, el vector $\boldsymbol{x}$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de los vectores de B, es decir, se tiene:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n$$

para unos únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base B). Definimos la imagen de $\boldsymbol{x}$ por f como:

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \lambda_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{w}_n.$$

b) Calculamos las imágenes (por f) de los vectores de la base canónica —que se deducen de ser f lineal, de (9) y de (6)—:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 1f(1,1,0) + (-1)f(0,1,0) = (2,1) - (1,0) = (1,1), \\ f(0,1,0) &= 1f(0,1,0) = (1,0) = (1,0), \\ f(0,0,1) &= (-1)f(1,1,0) + 1f(0,1,0) + 1f(1,0,1) \\ &= -(2,1) + (1,0) + (1,2) = (0,1). \end{aligned}$$

c) Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, podemos escribir ya la expresión de $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= f(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) \\ &= x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3 f(0,0,1) \\ &= x_1(1,1) + x_2(1,0) + x_3(0,1) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3). \end{aligned}$$

La única aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que verifica (6) es, pues, la que satisface:

$$\forall\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3),$$

es decir, es la aplicación: $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_3) \in \mathbb{R}^2$.

Nota bene Una aplicación lineal queda unívocamente determinada cuando se conocen las imágenes (por la aplicación) de los vectores de una base. ▲

EJERCICIO 1 *Dar una expresión general de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.* ▲

4. Caracterizaciones de una aplicación lineal inyectiva La siguiente proposición enuncia varias condiciones equivalentes a la inyectividad de una aplicación lineal.

Más CNS de aplicación lineal inyectiva

Proposición II.8 *Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *f es inyectiva;*

b) *si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ son p vectores linealmente independientes de E, entonces $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_p)$ son p vectores linealmente independientes de F;*

c) *el rango de f es igual a la dimensión del espacio vectorial de partida:*

$$\operatorname{rango} f = \dim E;$$

d) $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_F\}$.

Demostración Probemos en primer lugar la implicación: (a) $\Longrightarrow$ (b). Supongamos entonces que f es inyectiva, y sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ vectores de E linealmente independientes. De la igualdad:

$$\lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_p f(\boldsymbol{v}_p) = \mathbf{0}_F, \tag{10}$$

Las aplicaciones lineales inyectivas conservan el rango

Corolario *Una aplicación lineal inyectiva (con conjunto de partida un espacio vectorial de dimensión finita) conserva el rango, es decir, si f es una aplicación lineal inyectiva de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F, y $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ es un sistema de vectores de E, entonces:*

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)).$$

Demostración Sea: $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = p$. Si $p = 0$, entonces:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \ldots = \boldsymbol{v}_m = 0_E, \quad \text{y} \quad f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2) = \ldots = f(\boldsymbol{v}_m) = 0_F,$$

y se tiene el resultado. Si $p \geqslant 1$, entonces existen p vectores en el sistema que son linealmente independientes; podemos suponer son los p primeros. De esta forma, los vectores $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_p)$ son linealmente independientes (por ser f inyectiva, y de acuerdo con la proposición anterior), y se tiene:

$$\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)) \geqslant \operatorname{rango}\big(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_p)\big) = p. \tag{13}$$

Por otro lado (cf. propiedad 5 de las aplicaciones lineales, p. 116):

$$\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)) \leqslant \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = p. \tag{14}$$

De (13) y (14) se concluye:

$$\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)) = p = \operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m).$$

C.Q.D.

Nota bene En la demostración de las caracterizaciones anteriores no hemos impuesto restricción alguna a la dimensión del espacio vectorial F. ▲

EJEMPLO 5 Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) & \dashrightarrow & (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1). \end{array}$$

La aplicación f es lineal, como el lector puede comprobar sin dificultad, y también es inyectiva, lo cual puede demostrarse fácilmente utilizando algunas de las caracterizaciones vistas en la proposición II.8 (cf. p. 124).

Por ejemplo, se verifica: $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, pues de la igualdad $f(x_1, x_2) = (0,0,0)$, o bien: $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1) = (0,0,0)$, se deduce: $x_1 = x_2 = 0$.

También se verifica: $\operatorname{rango} f = \dim \mathbb{R}^2$. En efecto, si tomamos una base cualquiera de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo: $((1,1),(1,0))$, se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(1,1), f(1,0)) = \operatorname{rango}((2,0,1),(1,1,1)) = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

EJEMPLO 6 La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3) \end{array}$$

es lineal, como se comprueba con facilidad, y no es inyectiva, lo cual se puede demostrar usando la proposición II.8 (cf. p. 124).

En efecto, calculemos el rango de f. Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \operatorname{rango}((0,1,1),(1,1,0),(1,2,1)) = 2,$$

pues el vector $(1,2,1)$ es suma de los otros dos, y estos dos son linealmente independientes. En consecuencia: $\operatorname{rango} f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, y en virtud de la proposición II.8 (cf. p. 124) la aplicación f no es inyectiva.

EJERCICIO 2 *Si f es una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F, y si $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, demostrar que una condición suficiente para que f sea inyectiva es que el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ sea libre.* ▲

5. Caracterización de una aplicación lineal suprayectiva La siguiente proposición muestra una condición equivalente a la suprayectividad de una aplicación lineal.

CNS de aplicación lineal suprayectiva

Proposición II.9 *Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial E en un espacio vectorial F, ambos de dimensión finita. Una condición necesaria y suficiente para que f sea suprayectiva es que su rango coincida con la dimensión del espacio vectorial de llegada:*

$$\operatorname{rango} f = \dim F.$$

Demostración La condición es necesaria. Si f es suprayectiva, es decir, si los conjuntos $\operatorname{Im} f$ y F coinciden, entonces: $\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

La condición es suficiente. Si $\operatorname{rango} f = \dim F$, como: $\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f)$, entonces: $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$, y al ser $\operatorname{Im} f$ un subespacio vectorial del espacio vectorial F, se concluye (cf. corolario de la proposición I.17, p. 79): $\operatorname{Im} f = F$, esto es, la aplicación f es suprayectiva.

C.Q.D.

EJEMPLO 7 Si f es la siguiente aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_3) \in \mathbb{R}^2,$$

entonces es lineal, como se comprueba sin dificultad, y es suprayectiva, lo cual se puede demostrar con la proposición II.9 (cf. p. 127).

En efecto. Calculemos el rango de f partiendo de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \operatorname{rango}((1,1),(1,0),(0,-1)) = 2.$$

(Para el cálculo del anterior rango de vectores, nótese que el de tres vectores de $\mathbb{R}^2$ es a lo más igual a 2, y que los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ son linealmente independientes.) En consecuencia, el rango de f es igual a la dimensión de su espacio vectorial de llegada: $\operatorname{rango} f = \dim \mathbb{R}^2$, y en conclusión f es suprayectiva.

EJEMPLO 8 La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \dashrightarrow & (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3) \end{array}$$

es lineal —como se comprueba fácilmente— y no es suprayectiva, como se puede probar con la proposición II.9 (cf. p. 127).

Para calcular el rango de f consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se tiene:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \operatorname{rango}((1,0,1),(0,1,1),(2,-1,1)) = 2,$$

pues el vector $(2,-1,1)$ es combinación lineal de los otros dos: $(2,-1,1) = 2(1,0,1)-(0,1,1)$, y estos dos son linealmente independientes. En consecuencia, el rango de f no es igual a la dimensión de su espacio vectorial de llegada: $\operatorname{rango} f \neq 3$, y f no es suprayectiva.

Para las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de la misma dimensión finita, se tiene la siguiente

Proposición II.10 *Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial E en un espacio vectorial F, ambos de dimesión finita. Si E y F son de la misma dimensión, entonces:*

$$f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es suprayectiva.}$$

Demostración Teniendo en cuenta las caracterizaciones demostradas en las proposiciones II.8 (cf. p. 124) y II.9 (cf. p. 127), y la hipótesis: $\dim E = \dim F$, se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$f \text{ es inyectiva} \iff \operatorname{rango} f = \dim E \iff \operatorname{rango} f = \dim F \iff f \text{ es suprayectiva.}$$

C.Q.D.

Aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión finita

Corolario *Si f es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión finita, se verifica:*

$$f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es suprayectiva} \iff f \text{ es biyectiva.}$$

6. *Teorema de las dimensiones* Cuando el espacio vectorial de partida de una aplicación lineal es de dimensión finita, hay una relación entre su dimensión y la dimensión del núcleo y de la imagen:

Teorema de las dimensiones

Teorema 1 *Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F. Se verifica:*

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E, \tag{15}$$

o lo que es equivalente: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rango} f = \dim E$.

Demostración Si $\operatorname{Im} f = \{0_F\}$, es decir, si la imagen por f de cualquier vector de E es el vector 0_F, entonces $\operatorname{Ker} f = E$, y se verifica (15): $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E + 0 = \dim E$. Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, entonces: $\operatorname{rango} f = \dim E$ (cf. proposición II.8, p. 124), y se verifica (15) también en este caso: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 0 + \operatorname{rango} f = \dim E$.

Probemos la fórmula (15) para el caso en que $\operatorname{Im} f \neq \{0_F\}$ y $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$. Sea entonces $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p)$ una base de $\operatorname{Im} f$ (y por tanto: $\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f) = p$), y también sea $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q)$ una base de $\operatorname{Ker} f$ (y por tanto: $\dim(\operatorname{Ker} f) = q$). Al ser $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p$ vectores de $\operatorname{Im} f$, existen p vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ de E tales que:

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1,\ f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2,\ \ldots,\ f(\boldsymbol{v}_p) = \boldsymbol{w}_p,$$

y además $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ es un sistema libre, al serlo $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p)$.

Se verifica que el sistema $B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$, de vectores de E, es una base de E.

En efecto. En primer lugar, el sistema B es un sistema de generadores de E. Sea $\boldsymbol{x}$ un vector arbitrario de E. Entonces $f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f$, y se tiene:

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{w}_p$$

para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Si denotamos:

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{v}_p, \tag{16}$$

entonces $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$:

$$f(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_p f(\boldsymbol{v}_p) = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{w}_p = f(\boldsymbol{x}),$$

de donde: $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0_F$, luego: $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f$, y se tiene:

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_q \boldsymbol{u}_q \tag{17}$$

para algunos escalares $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$. De (16) y (17) se deduce:

$$\boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_q \boldsymbol{u}_q + \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{v}_p,$$

y $\boldsymbol{x}$ es una combinación lineal de los vectores del sistema B, es decir: $\boldsymbol{x} \in L(B)$. El sistema B es, por tanto, un sistema de generadores de E.

En segundo lugar, el sistema B es libre. Supongamos que los escalares $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ son tales que:

$$\delta_1 \boldsymbol{u}_1 + \delta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \delta_q \boldsymbol{u}_q + \gamma_1 \boldsymbol{v}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \gamma_p \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}_E. \tag{18}$$

De esta igualdad se deduce:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0}_F = f(\boldsymbol{0}_E) &= f(\delta_1 \boldsymbol{u}_1 + \delta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \delta_q \boldsymbol{u}_q + \gamma_1 \boldsymbol{v}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \gamma_p \boldsymbol{v}_p) \\ &= \delta_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \delta_q f(\boldsymbol{u}_q) + \gamma_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \gamma_p f(\boldsymbol{v}_p) \\ &= \gamma_1 \boldsymbol{w}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \gamma_p \boldsymbol{w}_p, \end{aligned}$$

y al ser $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_p)$ un sistema libre se infiere: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_q = 0$. Sustituyendo en (18) se obtiene: $\delta_1 \boldsymbol{u}_1 + \delta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \delta_q \boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{0}_E$, y al ser libre el sistema $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_q)$, se deduce: $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_q = 0$. En conclusión, y como de la igualdad (18) hemos deducido:

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_q = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_p = 0,$$

el sistema B es libre.

El sistema B es, pues, una base de E, luego:

$$\dim E = q + p = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f),$$

y queda probada la fórmula (15). □

Nota bene En esta demostración no se ha hecho restricción alguna sobre la dimensión del espacio vectorial F; es decir, el teorema de las dimensiones es válido incluso si F es de dimensión infinita. ▲

EJEMPLO 9 Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2 \quad \text{y} \quad (1,3) \in \operatorname{Im} f.$$

Determinemos una base del subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$.

Del teorema de las dimensiones se deduce:

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 2 = 1,$$

y por tanto una base de $\operatorname{Im} f$ estará formada por un único vector. Como $(1,3)$ es un vector no nulo de $\operatorname{Im} f$, es un vector linealmente independiente, y en consecuencia $((1,3))$ es una base de $\operatorname{Im} f$. Nótese que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}(1,3)$.

II.4 EL ESPACIO VECTORIAL $\mathcal{L}(E,F)$

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Designaremos el conjunto de las aplicaciones lineales de E en F con la notación: $\mathcal{L}(E,F)$. Probaremos que $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial F^E de las aplicaciones de E en F (cf. ejemplo 4 del capítulo I, p. 35).

En primer lugar, $\mathcal{L}(E,F)$ no es el conjunto vacío, pues la aplicación nula:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{O} & F \\ \boldsymbol{v} & \dashrightarrow & O(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_F, \end{array}$$

es una aplicación lineal de E en F: $O \in \mathcal{L}(E,F)$.

En segundo lugar, si comprobamos que cuando α_1 y α_2 son dos escalares, y f_1 y f_2 son dos aplicaciones lineales de E en F, entonces $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es una aplicación lineal de E en F, de acuerdo con la proposición I.1 (cf. p. 39) habremos probado que $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial F^E. Tenemos que probar, pues, que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es una aplicación lineal de E en F, y para ello (cf. proposición II.1, p. 114) verifiquemos:

$$\begin{gathered} \forall\,(\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in E^2, \\ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) = \beta_1(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\boldsymbol{v}) + \beta_2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\boldsymbol{w}). \end{gathered} \tag{19}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) &= (\alpha_1 f_1)(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) + (\alpha_2 f_2)(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) \\ &= \alpha_1 f_1(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) + \alpha_2 f_2(\beta_1\boldsymbol{v} + \beta_2\boldsymbol{w}) \\ &= \alpha_1\big(\beta_1 f_1(\boldsymbol{v}) + \beta_2 f_1(\boldsymbol{w})\big) + \alpha_2\big(\beta_1 f_2(\boldsymbol{v}) + \beta_2 f_2(\boldsymbol{w})\big) \\ &= \beta_1\alpha_1 f_1(\boldsymbol{v}) + \beta_1\alpha_2 f_2(\boldsymbol{v}) + \beta_2\alpha_1 f_1(\boldsymbol{w}) + \beta_2\alpha_2 f_2(\boldsymbol{w}) \\ &= \beta_1(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\boldsymbol{v}) + \beta_2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\boldsymbol{w}), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la definición de la adición de aplicaciones; la segunda, de la definición de la ley de composición externa; y la tercera, del hecho de que f_1 y f_2 son aplicaciones lineales. Por tanto, se verifica (19), y $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es una aplicación lineal.

En conclusión, $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial de F^E.

EJEMPLO 10 Calculemos una base del espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$.

Para determinar una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ basta conocer la imagen por ésta de los vectores de una base de $\mathbb{R}$ (cf. proposición II.7, p. 122). En nuestro caso, como $\mathbb{R}$ es de dimensión 1, cualquier número real no nulo formará una base; tomemos la formada por 1

—vector que en este caso coincide con el escalar 1—. Así, si f pertenece a $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$, f queda determinada sólo con conocer $f(1)$.

Consideremos las tres aplicaciones f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ que verifican:

$$f_1(1) = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \quad f_2(1) = \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \quad f_3(1) = \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1).$$

Entonces (f_1, f_2, f_3) es una base de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. En efecto. Sea f una aplicación arbitraria de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$, y sea: $f(1) = (x_1, x_2, x_3)$. Entonces se tiene:

$$(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3)(1) = x_1 f_1(1) + x_2 f_2(1) + x_3 f_3(1) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = (x_1, x_2, x_3),$$

es decir, la aplicación lineal f y la aplicación lineal $(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3)$ tienen el mismo comportamiento en el vector 1. Como (1) es una base de $\mathbb{R}$, se deduce: $f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$, y en consecuencia: $f \in L(f_1, f_2, f_3)$. El sistema (f_1, f_2, f_3) es, pues, un sistema de generadores de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$.

Comprobemos ahora que (f_1, f_2, f_3) es un sistema libre. Si α_1, α_2 y α_3 son escalares, de la igualdad: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = \boldsymbol{O}$, se deduce: $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3)(1) = \boldsymbol{O}(1) = (0,0,0)$, y por tanto: $\alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) + \alpha_3 f_3(1) = (0,0,0)$, de donde: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$, es decir: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. En consecuencia, el sistema (f_1, f_2, f_3) es un sistema libre.

El sistema (f_1, f_2, f_3) es entonces una base de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. Nótese que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) = 3$.

II.5 ISOMORFISMOS DE ESPACIOS VECTORIALES

1. Definición de isomorfismo. Espacios vectoriales isomorfos Se consideran espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

> Definición
>
> Isomorfismo — De una aplicación lineal f de un espacio vectorial E en un espacio vectorial E se dice es un **isomorfismo** de E en F (o de E sobre F) si es biyectiva.
>
> Automorfismo — Si f es un isomorfismo de E en sí mismo, es decir, de E en E, de f se dice es un **automorfismo** de E.

Si f es un isomorfismo de E en F, entonces su aplicación inversa: f^{-1}, es a su vez un isomorfismo de F en E (cf. proposición II.3, p. 118).

> Definición
>
> Espacios vect. isomorfos — Si existe un isomorfismo de E en F, se dice que E y F son **espacios vectoriales isomorfos.**

2. Propiedades La composición de dos isomorfismos es un isomorfismo, pues la composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal (cf. p. 118), y la composición de dos aplicaciones biyectivas es una aplicación biyectiva (cf. teorema 4, p. 401). A continuación, vemos otras propiedades de los isomorfismos y de los espacios vectoriales isomorfos.

Un espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{K}^n$

Proposición II.11 *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si E es de dimensión finita igual a n, con $n \geqslant 1$, entonces E y $\mathbb{K}^n$ son espacios vectoriales isomorfos.*

Demostración Si $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es una base de E, consideremos la aplicación lineal f de E en $\mathbb{K}^n$ tal que: $f(v_1) = e_1, f(v_2) = e_2, \ldots, f(v_n) = e_n$ (recordemos que una aplicación lineal queda inequívocamente determinada por las imágenes de los vectores de una base). Entonces: $\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = n$, y por tanto:

$$\operatorname{rango} f = \dim E \quad \text{y} \quad \operatorname{rango} f = \dim \mathbb{K}^n,$$

y en consecuencia f es inyectiva (cf. proposición II.8, p. 124) y es suprayectiva (cf. proposición II.9, p. 127), es decir: f es un isomorfismo. Los espacios vectoriales E y $\mathbb{K}^n$ son, pues, isomorfos. C.Q.D.

Los espacios vectoriales de la misma dimensión finita son isomorfos

Corolario *Dos espacios vectoriales (sobre un mismo cuerpo) de dimensión finita que tienen la misma dimensión son isomorfos.*

Tenemos, pues, una condición suficiente (basada en la dimensión) para que dos espacios vectoriales de dimensión finita sean isomorfos. El siguiente resultado nos va a servir para comprobar que esta condición es también necesaria.

CNS de isomorfismo (transformar bases en bases)

Proposición II.12 *Sea f una aplicación lineal de E en F, ambos espacios vectoriales de dimensión finita no nula, y sea $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una base de E. Una condición necesaria y suficiente para f sea un isomorfismo es que el sistema $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ sea una base de F.*

Demostración La condición es necesaria. Si f es un isomorfismo, entonces:

$$\operatorname{rango} f = \dim E = n \quad \text{y} \quad \operatorname{rango} f = \dim F,$$

y por tanto se tiene: $\operatorname{rango}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = n = \dim F$, y en consecuencia el sistema $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ es una base de F.

La condición es suficiente. Si el sistema $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ es una base de F, entonces el rango de este sistema es igual a n: $\operatorname{rango}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = n$, de donde: $\operatorname{rango} f = n = \dim F = \dim E$, y en consecuencia f es suprayectiva e inyectiva, es decir, f es un isomorfismo. C.Q.D.

Corolario *Si dos espacios vectoriales de dimensión finita (sobre un mismo cuerpo) son isomorfos, entonces tienen la misma dimensión.*

EJEMPLO 11 Estudiemos si es un isomorfismo la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

De acuerdo con la proposición II.12, tomemos una base de $\mathbb{R}^3$, que por comodidad será la canónica, y estudiemos si las imágenes por f de sus vectores forman una base —también de $\mathbb{R}^3$—. Se tiene:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (0,1,1), \quad f(\boldsymbol{e}_2) = (1,0,1), \quad f(\boldsymbol{e}_3) = (1,1,0),$$

y el sistema $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (es fácil ver que su rango es igual a 3). En consecuencia, f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, o también: un automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 12 Los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ y $\mathbb{R}^3$ son isomorfos, pues ambos son de la misma dimensión finita (cf. ejemplo 10, p. 131). Para definir un isomorfismo Φ del primero sobre el segundo, teniendo en cuenta la proposición II.12 (cf. p. 133), basta definir las imágenes por Φ de los vectores de una base de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ de suerte que éstas formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Por ejemplo, si tomamos como base de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ la ya considerada en el ejemplo 10 (cf. p. 131): (f_1,f_2,f_3), y definimos Φ como la aplicación lineal de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ en $\mathbb{R}^3$ que verifica: $\Phi(f_1) = (0,1,1)$, $\Phi(f_2) = (1,0,1)$ y $\Phi(f_3) = (1,1,0)$, entonces Φ es un isomorfismo, pues $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Por el momento, para estudiar si una aplicación lineal dada entre dos espacios vectoriales de dimensión finita es un isomorfismo, tenemos dos criterios: estudiar si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva (definición de isomorfismo), o estudiar si las imágenes de los vectores de una base forman una base (cf. proposición II.12, p. 133). Pero cuando los espacios vectoriales tienen la misma dimensión, basta sólo estudiar si la aplicación es inyectiva o si es suprayectiva (cf. proposición II.10, p. 128).

EJEMPLO 13 Estudiemos si es un isomorfismo la aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\forall\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3).$$

De la igualdad $f(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ se deduce:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 = 0,$$

y estas ecuaciones se verifican simultáneamente si y sólo si: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. En consecuencia, el único vector de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen por f es $(0,0,0)$ es el vector $(0,0,0)$, esto es: $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, y por tanto f es inyectiva. Como f es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión finita, con la proposición II.10 (cf. p. 128) y su corolario se concluye que f es biyectiva, es decir: f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

Como consecuencia inmediata de los comentarios precedentes al ejemplo anterior se tiene la siguiente

CNS de isomorfismo (rango igual a la dimensión común)

Proposición II.13 *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal f de un espacio vectorial E en un espacio vetorial F, ambos de la misma dimensión finita n, sea un isomorfismo es que su rango coincida con la dimensión común:*

$$\text{rango } f = n.$$

Demostración La aplicación f es un isomorfismo si y sólo si es suprayectiva (cf. proposición II.10, p. 128), y f es suprayectiva si y sólo si: rango $f = n$. C.Q.D.

II.6 FORMAS LINEALES

1. Espacio dual. Formas lineales En esta sección consideraremos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y supondremos que E es de dimensión finita.

Si consideramos $\mathbb{K}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (cf. ejemplo 1 del capítulo I, p. 35), entonces el conjunto $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial (cf. sección 4, p. 131). Este espacio vectorial $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se denomina **espacio dual** de E, y se denota por E^*:

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$$

De los elementos de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se dice son las **formas lineales** sobre E.

EJEMPLO 14 Veamos cómo es el espacio dual del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$: $(\mathbb{R}^2)^*$.

Un elemento f de $(\mathbb{R}^2)^*$, es decir, una forma lineal f sobre $\mathbb{R}^2$, es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Para que f esté determinada bastará conocer las imágenes por f de los vectores de una base de $\mathbb{R}^2$. Si tomamos por comodidad la base canónica: $((1,0),(0,1))$, la forma lineal f estará determinada si se conocen $f(1,0)$ y $f(0,1)$.

Sean: $f(1,0) = a_1$ y $f(0,1) = a_2$. Entonces para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1) = x_1 a_1 + x_2 a_2,$$

Esto es, la forma lineal f verifica: $\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Recíprocamente, si g es una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ para la que se cumple:

$$\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad \text{para algún } a_1 \in \mathbb{R} \text{ y algún } a_2 \in \mathbb{R},$$

entonces g es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^2$.

En conclusión, el conjunto $(\mathbb{R}^2)^*$ es el conjunto de las aplicaciones f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que verifican:

$$\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

para algunos números reales a_1 y a_2.

Se generaliza sin dificultad a $\mathbb{R}^n$: el conjunto $(\mathbb{R}^n)^*$ de las formas lineales sobre $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las aplicaciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que verifican:

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

para algunos números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Notación Si E es un espacio vectorial de dimensión finita no nula, y si B es una base de E, toda forma lineal sobre E está unívocamente determinada si se conocen las imágenes (por la forma lineal) de los vectores de la base B. Si $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$, y y_1, y_2, ..., y_n son escalares, la única forma lineal f que verifica:

$$f(\boldsymbol{v}_1) = y_1,\ f(\boldsymbol{v}_2) = y_2,\ \dots,\ f(\boldsymbol{v}_n) = y_n$$

será representada por comodidad de la siguiente manera:

$$f = \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & \dashrightarrow & y_1 \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_i & \dashrightarrow & y_i \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_n & \dashrightarrow & y_n. \end{cases}$$

▲

A continuación, y fijada una base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ de un espacio vectorial E de dimensión finita no nula, definimos una aplicación ℓ de E en su dual: E^*, es decir:

$$\boldsymbol{x} \in E \longmapsto \ell(\boldsymbol{x}) \in E^*.$$

Si $\boldsymbol{x} \in E$ y λ_1, λ_2, ..., λ_n son sus coordenadas en la base B:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n,$$

entonces $\ell(\boldsymbol{x})$ se define como la siguiente forma lineal sobre E:

$$\ell(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & \dashrightarrow & \lambda_1 \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_i & \dashrightarrow & \lambda_i \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_n & \dashrightarrow & \lambda_n. \end{cases}$$

En estas condiciones se verifica la siguiente

- ℓ es suprayectiva.

  Si $f \in E^*$, y $f(\boldsymbol{v}_1) = y_1$, $f(\boldsymbol{v}_2) = y_2$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n) = y_n$, consideremos el vector $\boldsymbol{z} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$; entonces:

$$\ell(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & \dashrightarrow & y_1 \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_i & \dashrightarrow & y_i \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_n & \dashrightarrow & y_n, \end{cases}$$

  y por tanto: $\ell(\boldsymbol{z}) = f$, y ℓ es suprayectiva.

Al ser ℓ una aplicación lineal inyectiva y suprayectiva de E en E^*, ℓ es un isomorfismo de E en E^*. C.Q.D.

Un espacio vectorial y su dual tienen la misma dimensión

Corolario *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita no nula n, entonces su dual: E^*, también es de dimensión n.*

2. Base dual Se introduce la notación:

$$\boldsymbol{v}_1^* = \ell(\boldsymbol{v}_1),\ \boldsymbol{v}_2^* = \ell(\boldsymbol{v}_2),\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n^* = \ell(\boldsymbol{v}_n).$$

Entonces, como $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, y ℓ es un isomorfismo de E en E^*, el sistema $B^* = (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ es una base de E^* (cf. proposición II.12, p. 133). De la base $B^* = (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$, del dual E^*, se dice es la **base dual** de la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de E.

Nota bene En la anterior construcción hemos fijado desde un principio una base B de E, y a partir de ella hemos definido el isomorfismo ℓ, y finalmente la base dual B^*. ▲

La siguiente proposición nos muestra una propiedad de la base dual:

El i-ésimo elemento de la base dual de una base B asigna a cada vector su i-ésima coordenada en la base B

Proposición II.15 *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita no nula, y si $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, y $B^* = (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$ es su base dual, entonces para el vector $\boldsymbol{x}$ de E de coordenadas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en la base B:*

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n,$$

se verifica:

$$\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_1,\ \boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_n.$$

Demostración Como $\boldsymbol{v}_1^* = \ell(\boldsymbol{v}_1)$ y $\boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n$, se tiene:

$$\boldsymbol{v}_1^* = \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & \dashrightarrow & 1 \\ \boldsymbol{v}_2 & \dashrightarrow & 0 \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{v}_n & \dashrightarrow & 0, \end{cases}$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v}_1^*(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n)\\ &= \lambda_1\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_n) = \lambda_1 1 + \lambda_2 0 + \cdots + \lambda_n 0 = \lambda_1.\end{aligned}$$

Y análogamente se demostraría que $\boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_n$. C.Q.D.

EJEMPLO 15 Estudiemos la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir, la base: $B_C^* = (\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$, dual de la base $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas de un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ en la base B_C son sus componentes: x_1, x_2, x_3, es decir:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,$$

luego (cf. proposición II.15, p. 138) se deduce:

$$\boldsymbol{e}_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad \boldsymbol{e}_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad \boldsymbol{e}_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Por ejemplo, la forma lineal $\boldsymbol{e}_1^*$ es la aplicación:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow x_1 \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 3 *Calcular la base dual de la base $B = ((1,1,0),(0,1,0),(1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.* ▲

3. Ortogonalidad Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y sea E^* su dual. Se dice que un elemento f de E^* y un vector $\boldsymbol{v}$ de E son **ortogonales** si se verifica: $f(\boldsymbol{v}) = 0$.

Dada una forma lineal f sobre E, el conjunto de los vectores de E que son ortogonales a f es $\operatorname{Ker} f$.

En efecto, si $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$, entonces $f(\boldsymbol{x}) = 0$, y f y $\boldsymbol{x}$ son ortogonales. Recíprocamente, si f y $\boldsymbol{x}$ son ortogonales, entonces $f(\boldsymbol{x}) = 0$, y $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$.

II.7 APLICACIONES AFINES

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

De una aplicación ϕ de E en F se dice es una **aplicación afín** de E en F si existen un vector $\boldsymbol{w}$ de F y una aplicación lineal f de E en F tales que:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{x}).$$

EJEMPLO 16 Sea ϕ la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \dashrightarrow & 2x_1+3x_2+1. \end{array}$$

Entonces ϕ es una aplicación afín de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, pues si denotamos por f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que verifica:

$$\forall\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2,$$

y si denotamos: $w = 1$ —en este caso es un vector de $\mathbb{R}$—, entonces:

$$\forall\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \phi(x_1,x_2) = w + f(x_1,x_2).$$

Consecuencias de la definición de aplicación afín Sea ϕ una aplicación afín entre los espacios vectoriales E y F tal que:

$$\forall\, x \in E,\ \phi(x) = w + f(x), \tag{22}$$

con $w \in F$ y $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Se verifica:

- *La aplicación ϕ determina unívocamente el vector w de F y la aplicación lineal f de E en F.*

  En efecto. Se tiene: $\phi(0_E) = w + f(0_E) = w$, luego: $w = \phi(0_E)$, y el vector w está unívocamente determinado por ϕ. Como consecuencia, de (22) podemos escribir: $\forall\, x \in E,\ \phi(x) = \phi(0_E) + f(x)$, de donde:

  $$\forall\, x \in E,\ f(x) = \phi(x) - \phi(0_E),$$

  y la aplicación lineal f también está unívocamente determinada por ϕ.

EJEMPLO 17 Para la aplicación afín:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \dashrightarrow & (x_1+x_2+1,2), \end{array}$$

se tiene que $\varphi(0,0) = (1,2)$, y la aplicación lineal g determinada por φ verifica:

$$g(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2) - \varphi(0,0) = (x_1+x_2+1,2) - (1,2) = (x_1+x_2,0),$$

es decir, g es la aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \dashrightarrow & (x_1+x_2,0). \end{array}$$

Efectivamente se tiene: $\forall\, x \in E,\ \varphi(x_1,x_2) = (1,2) + g(x_1,x_2)$.

- *La imagen por ϕ de una combinación afín de vectores de E es igual a la misma combinación afín de las imágenes. Es decir: si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ son vectores de E y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son escalares que suman 1:*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1, \tag{23}$$

entonces:

$$\phi(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{v}_m) = \lambda_1\phi(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2\phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_m\phi(\boldsymbol{v}_m).$$

De (22) y (23) se deduce:

$$\begin{aligned}
&\phi(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{v}_m)\\
&\quad = \boldsymbol{w} + f(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{v}_m)\\
&\quad = \boldsymbol{w} + \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_m f(\boldsymbol{v}_m)\\
&\quad = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)\boldsymbol{w} + \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_m f(\boldsymbol{v}_m)\\
&\quad = \lambda_1[\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v}_1)] + \lambda_2[\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v}_2)] + \cdots + \lambda_m[\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v}_m)]\\
&\quad = \lambda_1\phi(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2\phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_m\phi(\boldsymbol{v}_m).
\end{aligned}$$

- *La imagen por ϕ de un subespacio afín de E es un subespacio afín de F. Más en concreto, si $\boldsymbol{v} + E_1$ es un subespacio afín de E, entonces se verifica:*

$$\phi[\boldsymbol{v} + E_1] = (\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v})) + f[E_1].$$

En efecto, se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} \in \phi[\boldsymbol{v} + E_1] &\iff \exists\, \boldsymbol{x} \in E_1,\ \boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\\
&\iff \exists\, \boldsymbol{x} \in E_1,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\\
&\iff \exists\, \boldsymbol{x} \in E_1,\ \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v})) + f(\boldsymbol{x})\\
&\iff \boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v})) + f[E_1].
\end{aligned}$$

EJEMPLO 18 Para ejercitarnos calculemos, para la aplicación afín φ del ejemplo 17, la imagen del siguiente subespacio afín de $\mathbb{R}^2$:

$$(3,4) + \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\varphi\left[(3,4) + \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}\right] &= ((1,2) + g(3,4)) + g\left[\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}\right]\\
&= ((1,2) + (7,0)) + \{(x + x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}\\
&= (8,2) + \mathbb{R}(1,0).
\end{aligned}$$

- *La imagen inversa por ϕ de un subespacio afín de F puede ser el conjunto vacío.*

EJEMPLO 19 Por ejemplo, el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(y,1) \mid y \in \mathbb{R}\} = (0,1) + \mathbb{R}(1,0)$$

es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$, y su imagen inversa por la aplicación afín φ del ejemplo 17 (cf. p. 140) es igual al conjunto vacío, es decir:

$$\varphi^{-1}[\{(y,1) \mid y \in \mathbb{R}\}] = \emptyset,$$

como se deduce de observar en la definición de φ que todo vector del conjunto imagen de φ tiene la segunda componente igual a 2.

- *Si la imagen inversa por ϕ de un subespacio afín de F no es el conjunto vacío, entonces esta imagen inversa es un subespacio afín de E.*

  Si $\boldsymbol{w}_1 + F_1$ es un subespacio afín de F y $\phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1]$ no es el conjunto vacío, probaremos que $\phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1]$ es un subespacio afín de E. Como, por hipótesis, $\phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1]$ no es el conjunto vacío, existirá algún vector $\boldsymbol{v} \in E$ tal que:

$$\boldsymbol{v} \in \phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1], \quad \text{o bien } \phi(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{w}_1 + F_1,$$

  de donde (cf. proposición I.5, p. 56):

$$\boldsymbol{w}_1 + F_1 = \phi(\boldsymbol{v}) + F_1.$$

  Recordando las consecuencias de la definición de suma de subconjuntos de un espacio vectorial (cf. p. 44), se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1] &\iff \boldsymbol{x} \in \phi^{-1}[\phi(\boldsymbol{v}) + F_1] \\
&\iff \phi(\boldsymbol{x}) \in \phi(\boldsymbol{v}) + F_1 \\
&\iff \boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{x}) \in (\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{v})) + F_1 \\
&\iff f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{v}) \in F_1 \\
&\iff f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \in F_1 \\
&\iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \in f^{-1}[F_1] \\
&\iff \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{v} + f^{-1}[F_1],
\end{aligned}$$

  de donde se obtiene: $\boldsymbol{x} \in \phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1] \iff \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{v} + f^{-1}[F_1]$, y por tanto:

$$\phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1] = \boldsymbol{v} + f^{-1}[F_1]. \tag{24}$$

  En consecuencia, $\phi^{-1}[\boldsymbol{w}_1 + F_1]$ es un subespacio afín de E.

EJEMPLO 20 Para la aplicación φ del ejemplo 17 (cf. p. 140), se verifica que la imagen inversa por φ del subespacio afín $(2,2)+\mathbb{R}(1,-1)$ no es el conjunto vacío, pues:

$$\varphi(1,0) = (2,2) \in (2,2)+\mathbb{R}(1,-1).$$

De acuerdo con (24), se verifica:

$$\varphi^{-1}\left[(2,2)+\mathbb{R}(1,-1)\right] = (1,0) + g^{-1}\left[\mathbb{R}(1,-1)\right] = (1,0)+\mathbb{R}(1,-1),$$

que es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$.

II.8 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 124) Lo resolveremos para el caso $n = 3$ y $m = 2$.

Sea, pues, f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Tomemos una base de $\mathbb{R}^3$, que por comodidad va a ser la canónica, y supongamos que las imágenes por f de sus vectores son:

$$f(1,0,0) = (a_1,b_1), \quad f(0,1,0) = (a_2,b_2), \quad f(0,0,1) = (a_3,b_3).$$

Si $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= f\big(x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)\big) \\ &= x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3 f(0,0,1) \\ &= x_1(a_1,b_1)+x_2(a_2,b_2)+x_3(a_3,b_3) \\ &= (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3, b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3). \end{aligned}$$

Es decir, toda aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ verifica:

$$\begin{aligned} &\forall\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \\ &\qquad f(x_1,x_2,x_3) = (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3, b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3), \end{aligned} \tag{25}$$

para determinados (por f) números reales a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3.

Por otro lado, una aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ de la forma (25) es lineal, como se comprueba fácilmente.

La generalización del desarrollo anterior es más fastidiosa que difícil, y sólo mostramos su conclusión: si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces f verifica:

$$\begin{aligned} &\forall\,(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &\qquad = (a_1^1x_1+a_2^1x_2+\cdots+a_n^1x_n, a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n,\dots \\ &\qquad\qquad \dots, a_1^mx_1+a_2^mx_2+\cdots+a_n^mx_n), \end{aligned}$$

donde cada a_i^j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, es un número real que viene determinado por la aplicación f.

Nota bene Con a_i^j se representa un número real, donde j es un superíndice, y no un exponente. ▲

Ejercicio 2 (p. 127) Nótese que, al ser $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ una base de E, se tiene que $\dim E = n$.

Si $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ es un sistema libre de F, entonces su rango es igual a n: $\operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = n$, de donde:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = n = \dim E,$$

y f es inyectiva (cf. proposición II.8, p. 124).

Ejercicio 3 (p. 139) Pongamos:

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0), \ \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0), \ \boldsymbol{v}_3 = (1,0,1),$$

y calculemos la base dual de B: $B^* = (\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_3^*)$.

De (9) (cf. p. 123) se obtiene:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \tag{26}$$

y si (x_1, x_2, x_3) es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$, de (26) se deduce:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3(-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) \\ &= (x_1 - x_3)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 + x_3 - x_1)\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3,\end{aligned}$$

y de la proposición II.15 (cf. p. 138) se concluye:

$$\boldsymbol{v}_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3, \quad \boldsymbol{v}_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 - x_1, \quad \boldsymbol{v}_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

RECAPITULACIÓN II

Definición y propiedades Consideramos dos espacios vectoriales E y F sobre un *mismo cuerpo* $\mathbb{K}$:

- **Aplicación** lineal de E en F: aplicación f de E en F que verifica:

$$\forall\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in E^2,\ f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}),$$
$$\forall\,(\alpha,\boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}\times E,\ f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v}).$$

  Condición necesaria y suficiente: f de E en F es lineal precisamente si:
  $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in E^2,\ f(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) + \beta f(\boldsymbol{w}).$
- Propiedades de una aplicación lineal f de E en F:
  - ◇ f conserva las combinaciones lineales:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1)+\alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+\alpha_n f(\boldsymbol{v}_n);$$

  - ◇ $f(0_E) = 0_F$;
  - ◇ $\forall\,\boldsymbol{v} \in E,\ f(-\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$;
  - ◇ si $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ es sistema ligado, entonces también es ligado el sistema $(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n))$;
  - ◇ si $(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n))$ es sistema libre, entonces también es libre el sistema $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$;
  - ◇ $\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m) \geqslant \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_m))$;
  - ◇ si E_1 es un subespacio vectorial de E: $f[E_1]$ es un subespacio vectorial de F;
    en particular: $\operatorname{Im} f = f[E] = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in E\}$ es un subespacio vectorial de F;
  - ◇ si F_1 es un subespacio vectorial de F: $f^{-1}[F_1]$ es un subespacio vectorial de E;
  - ◇ si f es biyectiva, su inversa: f^{-1}, también es lineal (y biyectiva);
  - ◇ la aplicación compuesta de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal.
- **Núcleo** de una aplicación lineal f de E en F: el conjunto $f^{-1}[\{0_F\}]$, que es subespacio vectorial de E.
  Se denota: $\operatorname{Ker} f$.
  Por definición: $\operatorname{Ker} f = f^{-1}[\{0_F\}] = \{\boldsymbol{v} \in E \mid f(\boldsymbol{v}) = 0_F\}$.
  Propiedad: f es inyectiva precisamente si: $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Aplicaciones lineales con conjunto de partida un espacio vectorial de dimensión finita Consideramos una aplicación lineal f de un espacio vectorial E de dimensión finita en un espacio vectorial F:

- Se verifica: $\operatorname{Im} f$ es de dimensión finita.
- **Rango de f**: dimensión de $\operatorname{Im} f$.
  Se denota: $\operatorname{rango} f$.
  Por definición: $\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Im} f)$.
  Propiedades:
  - ◇ el rango de f es igual al rango del sistema formado por las imágenes de los vectores de cualquier sistema de generadores de E;
  - ◇ $\operatorname{rango} f \leqslant \min\{\dim E, \dim F\}$;
  - ◇ $\operatorname{rango}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rango} f, \operatorname{rango} g\}$.
- **Caracterización de f por las imágenes de los vectores de una base**: si F es también de dimensión finita, y $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, la aplicación lineal f está unívocamente determinada cuando se conocen las imágenes $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_n)$ de los vectores de la base; en concreto:

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n).$$

- **Caracterizaciones de una aplicación lineal inyectiva**: son equivalentes las siguientes afirmaciones:
  - ◇ f es inyectiva;
  - ◇ si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$ son p vectores linealmente independientes de E, entonces $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, ..., $f(\boldsymbol{v}_p)$ son p vectores linealmente independientes de F;
  - ◇ el rango de f es igual a la dimensión del espacio vectorial de partida: $\operatorname{rango} f = \dim E$;
  - ◇ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

  Consecuencia: el rango de un sistema de vectores se conserva por una aplicación lineal inyectiva: para f inyectiva, se verifica:

$$\operatorname{rango}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{rango}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)).$$

- **Caracterización de una aplicación lineal suprayectiva**: si F es también un espacio vectorial de dimensión finita, se verifica: f es suprayectiva si y sólo si: $\operatorname{rango} f = \dim F$.
- **Teorema de las dimensiones**: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$.
- Si E y F son de la *misma* dimensión finita, se verifica:

$$f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es suprayectiva} \iff f \text{ es biyectiva}.$$

El espacio vectorial $\mathcal{L}(E,F)$ Consideramos dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$:

- $\mathcal{L}(E,F)$ designa el conjunto de las aplicaciones lineales de E en F;
- $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y es subespacio vectorial de F^E.

Isomorfismos de espacios vectoriales Consideramos dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$:

- **Isomorfismo** de E en F: aplicación lineal biyectiva de E en F. Se dice entonces: E y F son **isomorfos.**
  Automorfismo de E: isomorfismo de E en E.
- Propiedades: si E y F son de dimensión finita:
  - ◇ E y F son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión;
  - ◇ si $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ es una base de E, entonces $f\in\mathcal{L}(E,F)$ es un isomorfismo si y sólo si $(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n))$ es una base de F;
  - ◇ si $\dim E=\dim F=n$, entonces $f\in\mathcal{L}(E,F)$ es un isomorfismo si y sólo si: $\operatorname{rango} f=n$.

Formas lineales Consideramos un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y suponemos que E es de dimensión finita:

- **Espacio dual** de E: $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, conjunto de las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$.
  Se denota: E^*.
  Forma lineal sobre E: cada elemento de E^*.
- Si $B=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ es una base de E:
  - ◇ Dado $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n$, se define la forma lineal $\ell(\boldsymbol{x})$ como:

$$\ell(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{v}_1 & \dashrightarrow \quad \lambda_1\\ & \cdots\\ \boldsymbol{v}_i & \dashrightarrow \quad \lambda_i\\ & \cdots\\ \boldsymbol{v}_n & \dashrightarrow \quad \lambda_n.\end{cases}$$

  - ◇ Los espacios E y E^* son isomorfos, y ℓ es un isomorfismo de E en E^*.
  - ◇ **Base,** de E^*, **dual** de la base B de E: $(\ell(\boldsymbol{v}_1),\ell(\boldsymbol{v}_2),\ldots,\ell(\boldsymbol{v}_n))$.
    Se denota: $B^*=(\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\ldots,\boldsymbol{v}_n^*)$.
    Si $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n$: $\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x})=\lambda_1$, $\boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{x})=\lambda_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{x})=\lambda_n$ (la imagen por la forma lineal $\boldsymbol{v}_i^*$ del vector $\boldsymbol{x}$ es la i-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}$ en la base B).
- Una forma lineal $f\in E^*$ y un vector $\boldsymbol{v}\in E$ son **ortogonales** si: $f(\boldsymbol{v})=0$.
  Se verifica: $\{\boldsymbol{w}\in E\mid f \text{ y } \boldsymbol{w} \text{ son ortogonales}\}=\operatorname{Ker} f$.

Aplicaciones afines Consideramos dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$:

- **Aplicación afín** de E en F: aplicación ϕ de E en F para la que existen $\boldsymbol{w} \in F$ y $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que: $\forall\, \boldsymbol{x} \in E$, $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{x})$.
- Propiedades de una aplicación afín ϕ:
  - ◇ la aplicación f y el vector $\boldsymbol{w}$ están unívocamente determinados por ϕ;
  - ◇ ϕ conserva las combinaciones afines: si $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$:

$$\phi(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n) = \lambda_1 \phi(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 \phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_n \phi(\boldsymbol{v}_n);$$

  - ◇ la imagen por ϕ de un subespacio afín de E es un subespacio afín de F;
  - ◇ la imagen inversa por ϕ de un subespacio afín de F, si no es vacía, es un subespacio afín de E.

Capítulo III

MATRICES

ESQUEMA - RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Definición de matriz Dados dos números naturales n y m, una *matriz* (real) de *orden* (n, m) es una disposición de $n \cdot m$ números reales en forma rectangular en n filas y m columnas, que son las *filas* y las *columnas* de la matriz.

Por ejemplo, una matriz de orden $(2,3)$ es una disposición en dos filas y en tres columnas de $2 \cdot 3 = 6$ números reales. Con la notación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \pi \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

estamos introduciendo una matriz concreta de orden $(2,3)$. La estamos designando por A (las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas), y tiene efectivamente dos filas y tres columnas. En cualquier matriz, las filas se leen de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha, así que la primera fila de la matriz A es la formada por los números 2, -3 y π; o dicho más formalmente: los *términos* de la primera fila de la matriz A son 2, -3 y π. Análogamente, los términos de la segunda fila de A son 1, 0 y $1/2$; los términos de la primera columna de A son 2 y 1; los de la segunda columna, -3 y 0; y los de la tercera, π y $1/2$. En la matriz A también observamos, por ejemplo, que el número -3 está situado en la primera fila y en la segunda columna; se dice que el *término de posición* $(1,2)$ de la matriz A es igual a -3, y se escribe: $a_{12} = -3$ (nótese que se utiliza la letra que designa la matriz pero minúscula, y figuran como subíndice el número de fila y el número de columna, en este orden y sin comas). Análogamente, podemos decir que el término de posición $(2,2)$ de la matriz A es igual a 0, y se escribe: $a_{22} = 0$. Otros términos de A son: $a_{11} = 2$, $a_{13} = \pi$ o $a_{23} = 1/2$.

Otro ejemplo. Consideremos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2/3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

La matriz B es de orden $(3,4)$: tiene tres filas y cuatro columnas. Los términos de la segunda fila, por ejemplo, son 0, 2, 1 y -1; los de la tercera columna: 5, 1 y 0. El término de posición $(2,4)$ es igual a -1, lo cual escribimos así: $b_{24} = -1$; también: $b_{31} = 9$, $b_{34} = 1/5$, o $b_{14} = 2/3$.

Una matriz puede tener una sola fila, o una sola columna. Las del primer tipo se denominan *matrices fila*; las del segundo, *matrices columna*. Por ejemplo, de las cuatro matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

las dos primeras son matrices fila, de órdenes $(1, 3)$ y $(1, 5)$, respectivamente; las dos últimas son matrices columna, de órdenes respectivos $(3, 1)$ y $(2, 1)$.

Nota bene Los términos de una matriz fila se escriben separados por un espacio, y no se escribe ninguna coma. No debe confundirse, pues, la matriz fila $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ con la terna $(1, -3, 4)$, cuyas componentes se escriben separadas por comas. ▲

Son de especial interés las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas: son las llamadas matrices *cuadradas*. Más en concreto, una matriz cuadrada de orden n es una matriz con n filas y con n columnas.[1] Por ejemplo, las siguientes matrices son cuadradas:

$$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 1/4 & 10\\ 1 & 0 & e^2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1/3 & 2 & -2 & 5\\ \pi^3 & 1/4 & 1 & 4\\ 0 & 10^{-4} & 1 & \sqrt{3}/2\\ 1 & -2/7 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

de órdenes 2, 3 y 4, respectivamente. En una matriz cuadrada de orden n, los términos de la *diagonal principal* son los de posición $(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)$. Por ejemplo, en la primera de las matrices cuadradas anteriores, los términos de la diagonal principal son 1 y 1; en la segunda son 3, $1/4$ y e^2; en la tercera, $1/3$, $1/4$, 1 y 0. De una matriz cuadrada que tiene los términos de la diagonal principal iguales a 1 y los restantes iguales a 0 diremos es una matriz *identidad* (o *unitaria*). Para cada orden n hay una, que se denota I_n. Las de orden 2, 3 y 4 son, respectivamente, las siguientes:

$$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

También nos interesa destacar otro tipo de matriz: la matriz nula. Una matriz, del orden que sea (cuadrada o no), es *nula* (o como también se dice: una matriz *cero*) si todos sus términos son iguales a 0. Cualquier matriz nula se denota por 0.[2] Por ejemplo, las siguientes matrices son nulas:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

de órdenes respectivos $(1, 2)$, $(3, 1)$ y $(2, 2)$.

[1] Nótese que decimos "orden n", y no "orden (n, n)".

[2] En esta notación no se señala el orden, lo cual no suele llevar a confusión.

Finalmente, en esta sección se presentan las *matrices columna* de una matriz y los *vectores columna* de una matriz. Lo vemos con un ejemplo. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1 & -2/7 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la primera matriz columna de la matriz A se define como aquella matriz columna cuyos términos son los de la primera columna de A; se denota: A_1. Y el primer vector columna de A se define como aquel vector cuyas componentes son los términos de la primera columna de A; se denota: $\boldsymbol{a}_1$. Tales términos de la primera columna de A son: $1/2$, 3 y 1; así:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_1 = (1/2, 3, 1).$$

Análogamente se definen la restantes matrices columna de A, hasta hacer un total de cuatro, dado que la matriz A tiene cuatro columnas:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/4 \\ -2/7 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y los restantes vectores columna, también hasta hacer tantos como columnas tiene la matriz:

$$\boldsymbol{a}_2 = (2, 1/4, -2/7), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-2, 1, -1), \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_4 = (5, 4, 0).$$

En el texto también se introducen las *matrices fila* y los *vectores fila* de una matriz. La definición es, *mutatis mutandis*, como la de matriz columna de una matriz y la de vector columna de una matriz, respectivamente. Para la matriz A anterior, por ejemplo, la segunda matriz fila es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1/4 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

cuyos términos son los de la segunda fila de A. El segundo vector fila es $(3, 1/4, 1, 4)$: sus componentes son los términos de la segunda fila de A. Hay tantas matrices fila, y tantos vectores fila, como filas tiene la matriz: tres en este caso.

Nota bene Denotaremos las matrices columna de una matriz con la misma letra de la matriz acompañada de un subíndice que indica el orden (según se trate de la primera matriz columna, de la segunda, etc.): A_1, A_2, ... Y denotaremos los vectores columna con la letra de la matriz en minúscula y en negrita, y también con un subíndice: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ Para las matrices fila de un matriz y para los vectores fila no consideraremos una notación general análoga a esta. ▲

Matriz asociada a una aplicación lineal Dada una aplicación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, y fijada una base en el espacio vectorial de partida (aquí $\mathbb{R}^m$), y fijada otra base en el espacio vectorial de llegada (aquí $\mathbb{R}^n$), se construye una matriz de orden (n, m) (tantas filas como la dimensión del espacio de llegada, y tantas columnas como la del espacio de partida), llamada *matriz asociada* a la aplicación lineal (o *representante* de la aplicación lineal) en las bases fijadas. Esta matriz se construye por columnas. La primera columna de la forma siguiente: se calcula la imagen por la aplicación lineal del *primer* vector de la base elegida en el espacio de partida, y se calculan las coordenadas de este vector en la base elegida en el espacio de llegada; estas coordenadas son los términos de la primera columna de la matriz. Análogamente la segunda columna: se calcula la imagen por la aplicación lineal del *segundo* vector de la base del espacio de partida, y las coordenadas de este vector imagen en la base del espacio de llegada son los términos de la tal segunda columna. Y así con las demás.

Veamos un ejemplo. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida de la forma: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3)$, y elijamos una base en $\mathbb{R}^3$ (espacio de partida), y otra en $\mathbb{R}^2$ (espacio de llegada); en concreto: $((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1))$ y $((1,0),(1,1))$, respectivamente. Denotemos por A la matriz asociada a la aplicación lineal f en las bases B y B'. Se trata de una matriz con tantas filas como marca la dimensión del espacio de llegada y con tantas columnas como marca la del espacio de partida, así que es de orden $(2,3)$. La primera columna de A se construye de forma que sus términos son las coordenadas en la base B' (base elegida del espacio de llegada) de la imagen por f del primer vector de la base B (base elegida del espacio de partida). Este primer vector de la base B es $(1,0,0)$, su imagen por f es: $f(1,0,0) = (1,2)$, y las coordenadas de este último vector, es decir, de $(1,2)$, en la base B' son -1 y 2, pues: $(1,2) = -(1,0) + 2(1,1)$. La primera columna de la matriz A tiene entonces por términos -1 y 2. Análogamente, los términos de la segunda columna de la matriz A son las coordenadas en la base B' de la imagen por f del segundo vector de la base B. Este segundo vector de B es $(1,1,0)$, que tiene por imagen: $f(1,1,0) = (2,2)$, y las coordenadas del vector $(2,2)$ en la base B' son 0 y 2, pues: $(2,2) = 0(1,0) + 2(1,1)$; los términos de la segunda columna de A son entonces 0 y 2. Finalmente, los términos de la tercera (y última) columna de A son las coordenadas en la base B' de la imagen por f del tercer vector de la base B. La imagen por f del tercer vector de B es: $f(0,1,1) = (1,-1)$, y las coordenadas de este último vector en la base B' son 2 y -1, ya que: $(1,-1) = 2(1,0) - (1,1)$; los términos de la tercera columna de A son, pues, 2 y -1. La matriz A es finalmente esta:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es la matriz asociada a f (o representante de f) en las bases B y B'.

La matriz asociada a una aplicación lineal depende de las bases elegidas. Si para la aplicación lineal f anterior fijamos en el espacio de partida la misma base B que ya teníamos, pero fijamos para el de llegada (recordemos que es $\mathbb{R}^2$) la base canónica (en vez de la base B'), es decir: $((1,0),(0,1))$, entonces el procedimiento descrito nos lleva a otra matriz. La calculamos, como la anterior, por columnas. Para la primera de estas columnas, calculamos entonces la imagen por f del primer vector de la base B (que es la elegida en el espacio de partida), la cual ya conocemos del párrafo anterior: $f(1,0,0) = (1,2)$, y a continuación calculamos, de este vector imagen, sus coordenadas en la base elegida en el espacio de llegada; como esta base es la canónica, tales coordenadas son directamente sus componentes, es decir: 1 y 2; y estos son los términos de la primera columna de la nueva matriz asociada. Los términos de la segunda columna se obtienen de forma análoga: se calcula la imagen por f del segundo vector de la base B, para calcular a su vez las coordenadas de esta imagen en la base canónica, que de nuevo no son más que sus componentes; se tiene: $f(1,1,0) = (2,2)$, así que los términos de la segunda columna son 2 y 2. Finalmente, para la tercera y última columna, como la imagen por f del tercer vector de la base B es $f(0,1,1) = (1,-1)$, los términos de la tercera columna de la matriz son 1 y -1. Recopilando lo obtenido, podemos afirmar que la matriz asociada a f en la base B de $\mathbb{R}^3$ y en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es esta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Para obtener la matriz asociada a una aplicación lineal en unas bases, cuando la base fijada en el espacio de llegada es la canónica, no hay más que calcular la imagen por la aplicación lineal de cada uno de los vectores de la base fijada en el espacio de partida; las componentes de estos vectores imagen son los términos de las columnas de la matriz asociada. ▲

En el texto, en esta sección, también se introduce el concepto de aplicación lineal *canónicamente asociada* a una matriz. Dada una matriz, la aplicación lineal canónicamente asociada a ella es aquella aplicación lineal cuya matriz representante en las bases canónicas es precisamente la matriz dada. Veamos un ejemplo. Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es de orden $(3,2)$, luego sólo puede ser representante de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Lo que buscamos es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, que denotaremos por $\mathcal{A}$ (misma letra que la matriz, pero en tipo caligráfico), tal que su matriz asociada en las bases canónicas sea precisamente A (es decir, tal que $\mathcal{A}$

sea su matriz asociada tomando en $\mathbb{R}^2$ —espacio de partida— la base canónica, y también tomando en $\mathbb{R}^3$ —espacio de llegada— la base canónica). De acuerdo con el procedimento para construir la matriz asociada a una aplicación lineal en unas bases, siendo la del espacio de llegada la canónica, los términos de la primera columna de la matriz son las componentes de la imagen por la aplicación lineal del primer vector de la base del espacio de partida. Como los términos de la primera columna de la matriz A son -1, 1 y -1, podemos decir que la imagen por la aplicación $\mathcal{A}$ del vector $(1,0)$ (primero de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la escogida en el espacio de partida) debe ser igual a $(-1,1,-1)$, esto es: $\mathcal{A}(1,0) = (-1,1,-1)$. Análogamente, como los términos de la segunda columna de A son 0, 2 y 0, la imagen por $\mathcal{A}$ del segundo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ debe ser igual a $(0,2,0)$: $\mathcal{A}(0,1) = (0,2,0)$. Recopilando, la aplicación lineal $\mathcal{A}$, que tiene como matriz asociada en las bases canónicas la matriz A, es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\mathcal{A}(1,0) = (-1,1,-1) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}(0,1) = (0,2,0).$$

Ya sabemos que conocer de una aplicación lineal la imagen de los vectores de una base es una forma de determinarla. En este caso, conocemos la imagen por la aplicación lineal $\mathcal{A}$ de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$; de acuerdo con un procedimiento descrito en el capítulo anterior, obtenemos que la imagen por $\mathcal{A}$ de un vector genérico (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$ es esta:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1,x_2) &= \mathcal{A}(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1\mathcal{A}(1,0) + x_2\mathcal{A}(0,1)\\ &= x_1(-1,1,-1) + x_2(0,2,0) = (-x_1, x_1 + 2x_2, -x_1).\end{aligned}$$

La aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz A es la aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{A}(x_1,x_2) = (-x_1, x_1 + 2x_2, -x_1)$.

El espacio vectorial $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ En esta sección se estudian dos importantes operaciones con matrices: la adición de matrices y la multiplicación de un número por una matriz.

Si tenemos dos matrices del mismo orden, su *suma* es otra matriz, también del mismo orden, obtenida sumando los términos de la misma posición de las matrices dadas. Por ejemplo, dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

ambas del mismo orden: $(2,3)$, su suma, que se denota: $A + B$, es la matriz de orden (2, 3) obtenida sumando los términos de la misma posición de A y B:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -1 + 0 & 1 + (-3) \\ 0 + 1 & 3 + 1 & 5 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dados un número y una matriz, el producto del número por la matriz es la matriz obtenida multiplicando por el número cada uno de los términos de la matriz dada. Por ejemplo, el producto del número 2 por la matriz A del párrafo anterior, producto que se denota: $2A$, se efectúa así:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices Definimos la *multiplicación* de dos matrices sólo para dos matrices con esta propiedad: el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda; y, en este caso, el resultado, es decir, el *producto* de las dos matrices, es una matriz con tantas filas como tiene la primera y tantas columnas como tiene la segunda. Por ejemplo, el producto de dos matrices A y B, la primera de orden (2, 3) y la segunda de orden (3, 4), puede efectivamente efectuarse, porque el número de columnas de la primera y el de filas de la segunda es el mismo —tres en este caso—, y el producto, que se denota: AB, resultará ser una matriz de orden (2, 4).

Para explicar cómo se calcula el producto de dos matrices, consideremos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es de orden (2, 3) y la matriz B es de orden (3, 4): de acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, el producto AB puede efectivamente llevarse a cabo, y tendrá como resultado una matriz de orden (2, 4). Para calcular el término de posición (i, j) de una matriz producto (en este ejemplo, i es igual a 1 o a 2 y j es igual a 1, a 2, a 3 o a 4), intervienen sólo los términos de la i-ésima fila de la primera matriz (A en este caso) y los de la j-ésima columna de la segunda matriz (B en este caso), y tal término es igual a la suma de los productos dos a dos de los términos de esa fila y de esa columna. Verbigracia, para calcular el término de posición (1, 1) de la matriz producto AB, intervienen exclusivamente los términos de la primera fila de A: 2, -1 y 0, y los de la primera columna de B: -2, 2 y 1, y dicho término es igual a la suma de los productos dos a dos de estos términos:

$$2(-2) + (-1)2 + 0 \cdot 1 = -6.$$

Esquemáticamente, podríamos representar este cálculo así:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-2)+(-1)2+0\cdot 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para calcular el término de posición $(1,2)$ de la matriz producto sólo intervienen los términos de la primera fila de la matriz A y los de la segunda columna de la matriz B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2\cdot 1+(-1)0+0\cdot 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Para el cálculo del término de posición $(1,3)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2\cdot 0+(-1)(-2)+0\cdot 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Y de manera similar se calculan los demás. El resultado final es este:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & -1/3 \\ -5 & -2 & 9 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Nota La definición de multiplicación de matrices viene motivada por la composición de aplicaciones lineales. La proposición III.7 (cf. p. 201) detalla este hecho. ▲

Es de destacar que, en general, no es indiferente el orden en el que se escriben dos matrices que se quieren multiplicar, a diferencia de lo que ocurre con los números (con los cuales el orden de los factores no altera el producto). En primer lugar, puede estar definido un producto AB y no estar definido el producto en el otro orden; por ejemplo, para las matrices A y B del ejemplo anterior, cuyo producto AB hemos calculado, no estaría definido el producto en el otro orden, pues el número de columnas de B (que sería ahora la primera matriz) no es igual al de filas de A (que sería la segunda matriz). En segundo lugar, también puede ocurrir que tanto el producto AB como el BA estén definidos, pero que sean matrices de distinto orden, y por ende distintas; por ejemplo, si A es de orden $(2,3)$ y B de orden $(3,2)$, ambos productos se pueden efectuar, pero AB resultaría de orden $(2,2)$ y BA de orden $(3,3)$. Finalmente, puede ocurrir que ambos productos estén definidos y sean matrices del mismo orden (esto acontece precisamente cuando ambas matrices son cuadradas del mismo orden), pero ser ambas matrices producto distintas; se dice en este último caso que las matrices *no conmutan*. En el ejemplo 23 (cf. p. 204) se muestran dos matrices que no conmutan: ambas son cuadradas (de orden 2), luego sus dos posibles productos están definidos y también son matrices cuadradas (de orden 2), pero se trata de matrices diferentes.

Si conocemos la matriz asociada a una aplicación lineal en unas bases, puede utilizarse la matriz, y cierto producto de matrices, para calcular la imagen por la aplicación lineal de cualquier vector. Veámoslo con un ejemplo. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es esta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Nótese que podríamos haber dicho simplemente: sea f la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz A; es decir: f es la aplicación lineal A, si recordamos la notación para la aplicación lineal canónicamente asociada a una matriz.) Acontece lo siguiente: afirmar que un vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ se aplica por f en el vector (s, t) de $\mathbb{R}^2$, esto es: $f(a, b, c) = (s, t)$, es lo mismo que escribir la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(Obsérvese que la matriz columna del primer miembro tiene por términos las componentes del vector (a, b, c), y que la matriz columna del segundo miembro tiene por términos las componentes de (s, t); nótese también que este producto de matrices puede efectivamente efectuarse.) Supongamos que queremos calcular, por ejemplo, la imagen por f del vector $(1, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Podríamos proceder así: multiplicamos la matriz A por la matriz columna cuyos términos son 1, -1 y 0; de esta multiplicación resulta una matriz columna cuyos términos son las componentes del vector imagen. Es decir, como se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deducimos que la imagen por f del vector $(1, -1, 0)$ es igual al vector $(-2, 1)$, esto es: $f(1, -1, 0) = (-2, 1)$. Otra imagen: de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

se deduce: $f(0, 1, -2) = (5, -3)$. Incluso más: ¿cuál es la imagen por f de un vector genérico (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$? Multiplicamos la matriz A por la matriz columna cuyos términos son x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

y así la imagen por f de (x_1, x_2, x_3) es el vector de componentes $x_1 + 3x_2 - x_3$ y $-x_2 + x_3$; esto es: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$.

En el ejemplo anterior, la matriz A es la asociada a la aplicación lineal f en las bases canónicas. Cuando la matriz que conocemos es la asociada en unas bases que no son necesariamente las canónicas, también podemos calcular la imagen de un vector por la aplicación lineal haciendo uso de la matriz (y de cierto producto de matrices), pero el procedimiento es un poco más complicado. Veamos un ejemplo. Fijemos en $\mathbb{R}^3$ la base $B = ((1,0,0), (1,1,0), (0,1,1))$ y en $\mathbb{R}^2$ la base $B' = ((1,1), (0,1))$, y sea g la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada en estas bases es la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afirmar que la imagen por g de un vector $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^3$ es un vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$, es decir: $g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$, es lo mismo que escribir:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son las *coordenadas* en la base B (de $\mathbb{R}^3$) del vector $\boldsymbol{u}$, y s y t son las *coordenadas* en la base B' (de $\mathbb{R}^2$) del vector $\boldsymbol{v}$.

Nota bene En la igualdad matricial (1), donde la matriz era la asociada a aquella aplicación lineal f en las bases canónicas, los términos a, b y c juegan el papel de *componentes* del vector cuya imagen queremos calcular, y s y t juegan el papel de componentes del vector imagen. En la igualdad matricial anterior, donde la matriz es la asociada en unas bases que no son las canónicas, los términos a, b y c son las *coordenadas* en la primera base, la B, del vector cuya imagen queremos calcular, y s y t son las coordenadas en la segunda base, la B', del vector imagen. ▲

Para la aplicación lineal g del ejemplo que venimos considerando, calculemos, verbigracia, la imagen del vector $(2,0,-1)$. Haciendo uso de la matriz D, podemos calcular las coordenadas de este vector en la base B, y multiplicar la matriz D por la matriz columna cuyos términos son tales coordenadas; el resultado será una matriz columna cuyos términos serán las coordenadas en la base B' de la imagen buscada. Las coordenadas del vector $(2,0,-1)$ en la base B son 1, 1 y -1, pues se tiene: $(2,0,-1) = (1,0,0) + (1,1,0) - (0,1,1)$; el producto de la matriz D por la matriz columna cuyos términos son 1, 1 y -1 arroja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

lo que permite afirmar que el vector $g(2,0,-1)$ (que es de $\mathbb{R}^2$) es el de coordenadas 2 y 2 en la base B'; en definitiva:

$$g(2,0,-1) = 2(1,1) + 2(0,1) = (2,4).$$

Calculemos también, por ejemplo, la imagen por g del vector $(0,1,0)$. Las coordenadas de este vector en la base B son -1, 1 y 0, y se tiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que el vector $g(0,1,0)$ es de coordenadas 1 y 0 en la base B'; esto es: $g(0,1,0) = (1,1) + 0(0,1) = (1,1)$.

Rango de una matriz El *rango* de una matriz se define como el rango del sistema formado por sus vectores columna. Por ejemplo, consideremos esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tiene tres columnas, así que tiene tres vectores columna. El primer vector columna tiene por componentes los términos de la primera columna, es decir: 1, 2, -1 y 0, luego se trata del vector $(1,2,-1,0)$; el segundo tiene por componentes los términos de la segunda columna: $(2,4,3,1)$; y el tercero, los de la tercera columna: $(3,2,1,1)$. El rango de la matriz A es, de acuerdo con la definición, el rango de estos tres vectores:

$$\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rango}\big((1,2,-1,0),(2,4,3,1),(3,2,1,1)\big).$$

Recordando —del capítulo 1— el procedimiento para calcular el rango de unos vectores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango} A &= \operatorname{rango}\big((1,2,-1,0),(2,4,3,1),(3,2,1,1)\big) \\ &= \operatorname{rango}\big((1,2,-1,0),(0,0,5,1),(0,-4,4,1)\big) \\ &= 1 + \operatorname{rango}\big((0,0,5,1),(0,-4,4,1)\big) = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Ahora bien, vale la pena "trasladar" a matrices el procedimiento de cálculo del rango de un sistema de vectores. Así, dado que el rango de un sistema formado por un solo vector es igual a 0 o a 1 según sea este único vector nulo o no, respectivamente, podemos decir que el rango de una matriz con una sola columna es igual a 0 si todos sus términos son nulos, y es igual a 1 si alguno no lo es. Por ejemplo:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = 1.$$

Por otra parte, como el rango de un sistema de dos vectores es igual a 1 o a 2 según sean los vectores proporcionales o no, respectivamente, podemos afirmar que el rango de una matriz de dos columnas es igual a 1 si ambas columnas son proporcionales, y es igual a 2 si no lo son (eliminado el caso trivial en el que ambas columnas tuvieran todos sus términos nulos, lo que daría rango igual a 0). Conviene precisar que el hecho de que dos columnas sean proporcionales significa que es posible obtener una de ellas multiplicando la otra por algún número, es decir, multiplicando todos los términos de esta última por el número. Por ejemplo, se tiene:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & -4\\1/2 & -1\\1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\\1 & 2\end{pmatrix} = 2.$$

La primera de estas matrices tiene sus dos columnas proporcionales: la segunda columna se puede obtener multiplicando todos los términos de la primera por -2; el rango es efectivamente igual a 1. La segunda matriz no tiene sus dos columnas proporcionales (no hay forma de multiplicar por algún número una de ellas y obtener la otra), así que el rango es igual a 2.

Finalmente, cuando un sistema de vectores está formado por tres o más, recordemos que lo que buscamos es reducir el problema de calcular su rango a un sistema con un vector menos. Lo que hacemos es intentar transformar el sistema en otro nuevo, con el mismo número de vectores y con el mismo rango que el original, pero tal que todos sus vectores tengan una misma componente nula excepto uno, que la tiene no nula; este último vector no es igual a una combinación lineal de los demás, y al eliminarlo disminuye el rango en 1. La transformación de un sistema en otro, recordemos, se realiza teniendo en cuenta que el rango no varía si sumamos a un vector del sistema una combinación lineal de los demás, y en particular si le sumamos otro del sistema multiplicado por algún número.

Es importante enfatizar que, en el procedimiento anterior, se hace uso de dos propiedades del rango de un sistema de vectores. Una de ellas es la citada al final del párrafo anterior: el rango del sistema no varía si sumamos a un vector del sistema una combinación lineal de los demás. La otra es esta: al eliminar un vector del sistema, el rango no varía si ese vector es igual a una combinación lineal de los demás, pero el rango disminuye en 1 si el vector no es igual a una combinación lineal de los demás. Trasladadas a matrices, estas dos propiedades toman este aspecto:

- el rango de una matriz no varía si sumamos a una columna una combinación lineal de las demás (entendiendo estas operaciones entre columnas término a término);
- al eliminar en una matriz una columna, el rango no varia si tal columna es igual a una combinación lineal de las demás, y el rango disminuye en 1 si la columna no es igual a una combinación lineal de las demás.

Haciendo uso de estas propiedades, para calcular el rango de una matriz de tres o más columnas, podemos entonces intentar transformar la matriz dada en otra, del mismo orden y con el mismo rango, pero con esta característica: todas sus columnas tienen nulo el término de una misma posición, excepto una, que lo tiene no nulo; es decir, *de forma que haya una fila con todos sus términos nulos excepto uno.* La columna a la que este término no nulo pertenezca se puede eliminar, disminuyendo el rango de la matriz en 1, y reduciendo así el problema al de una matriz con una columna menos.

Veámoslo con la matriz A citada al principio de este apartado. Intentemos transformar esta matriz en otra, del mismo orden y del mismo rango, que tenga una fila con todos sus términos nulos excepto uno; y, verbigracia, busquemos que tal fila sea la primera. Hacemos para ello uso de la propiedad de que el rango no varía si sumamos a una columna una combinación lineal de las demás. Podemos conseguir nuestro objetivo dejando como está la primera columna (cuyo primer término es no nulo), y sumando a cada una de las demás esta primera columna multiplicada por algún número de forma que el primer término que resulte sea nulo. Si sumamos a la segunda columna la primera multiplicada por -2, obtenemos una nueva segunda columna, con términos 0, 0, 5 y 1; y si sumamos a la tercera columna la primera multiplicada por -3, obtenemos una nueva tercera columna, con términos 0, -4, 4 y 1. La nueva matriz tiene el mismo orden y el mismo rango que la matriz A, y su primera fila tiene todos sus términos nulos excepto el primero. Si en esta matriz eliminamos la primera columna, el rango disminuye en 1 y reducimos el problema a una matriz con una columna menos. En resumen:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta última matriz obtenida tiene dos columnas, y no son proporcionales, luego su rango es igual a 2. Confirmamos que el rango de la matriz A es igual a 3.

En la sección 8 veremos que el rango de una matriz también es igual al rango del sistema formado por sus vectores *fila*. Este resultado nos permitirá ampliar el método que acabamos de describir para calcular el rango de una matriz.

Finalmente, queremos llamar la atención sobre un resultado importante que se prueba en el texto casi terminada esta sección dedicada al rango de una matriz: si una matriz es la asociada a una aplicación lineal en unas bases, entonces la matriz y la aplicación lineal tienen el mismo rango. Si la matriz es la asociada en las bases canónicas, veamos con un ejemplo cómo cerciorarse de este resultado. Consideremos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3)$ (con la que ya trabajamos en el segundo apartado de esta Introducción). Para calcular la matriz asociada a esta aplicación lineal en las bases canónicas, calculamos la imagen por f de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (que es el espacio de partida): $f(1,0,0) = (1,2)$, $f(0,1,0) = (1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,-1)$; ahora, como la base elegida en $\mathbb{R}^2$ (espacio de llegada) es la canónica, las componentes de estos vectores obtenidos son directamente los términos de las columnas de la matriz que buscamos: ésta es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, para calcular el rango de la aplicación lineal f, recordamos del capítulo II lo que debemos hacer: calculamos la imagen por f de los vectores de la base canónica del espacio de partida, para calcular a continuación el rango del sistema que estas imágenes forman; y este rango es el rango de la aplicación lineal. En concreto:

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}\left(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\right) = \operatorname{rango}\left((1,2),(1,0),(0,-1)\right).$$

Nótese que los tres vectores anteriores: $(1,2)$, $(1,0)$ y $(0,-1)$, imagen de los de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, son precisamente los vectores columna de la matriz G, luego el rango de ésta es por definición el del sistema formado por ellos. Es decir, podemos escribir: $\operatorname{rango} G = \operatorname{rango}\left((1,2),(1,0),(0,-1)\right)$. El rango de la aplicación lineal f y el rango de la matriz G, que la representa en las bases canónicas, es entonces el mismo; es sencillo calcular que es igual a 2. Finalmente, no dejemos de enfatizar que si consideramos la matriz asociada a esta aplicación lineal f en unas bases distintas de las canónicas, tal matriz sigue teniendo rango igual a 2. Por ejemplo, en el segundo apartado de esta Introducción calculamos la matriz asociada a la aplicación lineal f en las bases $B = \left((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\right)$ y $B' = \left((1,0),(1,1)\right)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El lector puede comprobar que el rango de esta matriz es efectivamente igual a 2.

Transformaciones elementales de una matriz Al hablar de *transformación elemental*, nos referimos a cierto tipo de transformaciones que realizaremos sobre las matrices. Estas transformaciones serán de tres tipos diferentes, que en el texto designamos con las etiquetas I, II y III.

Una transformación elemental de tipo I no es más que el intercambio de dos filas, dejando las restantes filas inalteradas. Por ejemplo, consideremos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una transformación elemental de tipo I que afecte a esta matriz puede ser esta: intercambiar las filas primera y tercera. Esta transformación se designa así: $F_1 \leftrightarrow F_3$, y se escribe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se aprecia que la segunda matriz difiere de la primera en que las filas primera y tercera están intercambiadas; las restantes filas se han quedado como estaban.

Una transformación elemental de tipo II es la multiplicación de una fila por un número no nulo (es decir, la multiplicación de todos los términos de una fila por un mismo número no nulo), dejando las restantes filas inalteradas. En la matriz que hemos considerado en el párrafo anterior, podemos efectuar, verbigracia, esta transformación de tipo II: multiplicar la segunda fila por 3; se denota así: $F_2 \leftarrow 3F_2$, y se escribe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda matriz difiere de la primera sólo en los términos de la segunda fila, que han quedado, todos, multiplicados por 3.

Finalmente, una transformación elemental de tipo III supone sumar a una fila otra multiplicada por un número (nulo o no). Es decir: se sustituye una fila por la suma (término a término) de ella misma y el resultado de multiplicar todos los términos de otra por un mismo número, y las restantes filas se dejan inalteradas, incluida la que se multiplica por el número. Para la matriz que venimos considerando como ejemplo, una transformación elemental de tipo III es, verbigracia, esta: sumar a la primera fila la cuarta multiplicada por 2. La denotamos así: $F_1 \leftarrow F_1 + 2F_4$, y se escribe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_4} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la única fila que se ha transformado es la primera: hemos sumado, término o término, a la primera fila de la primera matriz la cuarta multiplicada por 2; las restantes filas, incluida la cuarta, se han quedado como estaban.

Una propiedad muy importante de las transformaciones elementales es que conservan el rango, esto es: si en una matriz llevamos a cabo una transformación elemental (del cualquiera de los tres tipos), la matriz que obtenemos tiene el mismo rango que la original. El lector lo puede comprobar como ejercicio con las matrices de los ejemplos anteriores: todas tienen rango igual a 4.

Nota Las transformaciones elementales que consideramos son transformaciones *por filas*, porque sólo afectan a filas: son filas las que se intercambian, son filas las que se multiplican por un número, y son filas las que se suman a otra previamente multiplicada por un número. Sin embargo, es posible, de forma totalmente análoga, definir transformaciones elementales *por columnas*: intercambiar dos columnas (tipo I), multiplicar una columna por un número (tipo II), y sumar a una columna otra multiplicada por un número (tipo III). Las transformaciones elementales por columnas también conservan el rango. Si nos fijamos bien, la transformación por columnas de tipo III es precisamente la clase de transformación que llevábamos a cabo para "hacer ceros" en la fila de una matriz con vistas a calcular su rango. ▲

Antes de presentar aquí la siguiente propiedad de las transformaciones elementales que querríamos reseñar, estudiemos un ejemplo que nos ayudará a comprender de qué trata tal propiedad. Consideremos esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Su rango es igual a 2, como puede calcular el lector. Vamos a intentar, mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a la matriz A, llegar a una matriz de este tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2$$

(Los puntos: '•', señalan posiciones ocupadas por números sobre los que no hay ninguna limitación: pueden ser nulos o no, iguales a 1 o no.) Esta matriz es del mismo orden que A; notemos cómo es: sus dos primeras columnas son las dos primeras columnas de la matriz identidad I_3, su última fila tiene nulos todos los términos, y los términos restantes pueden ser números cualesquiera. Las columnas coincidentes con las de la matriz identidad son tantas como marca el rango: dos en este caso, y la cantidad de filas con los términos nulos son tantas como marca la diferencia entre el número de filas de la matriz y el rango: $3 - 2 = 1$ en este caso.

En primer lugar, tratamos de llegar a una matriz cuyos términos de la primera columna sean $1, 0$ y 0 (dicho de otra forma: cuyo primer vector columna sea $(1, 0, 0)$). Lo primero que hacemos es procurarnos un 1 en la posición $(1, 1)$, donde ahora hay un 0, y una forma de conseguirlo podría ser esta: primero, intercambiar las filas primera y segunda, lo cual proporciona un 2 en la posición $(1, 1)$; segundo, mutiplicar la nueva primera fila por $1/2$, lo cual termina de transformar el término de esa posición en 1. Esto es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow (1/2) F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora nos resta conseguir que el término de posición $(3, 1)$ sea igual a 0, y una forma de lograrlo es mediante una transformación elemental de tipo III; en concreto, nos sirve esta: $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$ (sumar a la tercera fila la primera). Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, desde la matriz que acabamos de obtener tratamos de llegar a una matriz cuyos términos de la segunda columna sean $0, 1$ y 0, pero sin que los de la primera dejen de ser $1, 0$ y 0; es decir, tratamos de llegar a una matriz cuyos dos primeros vectores columna sean $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. El primer paso sería procurarse un 1 en la posición $(2, 2)$, pero ya lo tenemos, así que sólo resta "transformar" en nulos los términos de posición $(1, 2)$ y $(3, 2)$. Para conseguir esto último sin afectar a la primera columna, debemos llevar a cabo sendas transformaciones de tipo III: sumar a la primera fila la segunda multiplicada por -2 (para el término de posición $(1, 2)$), y sumar a la tercera fila la segunda también multiplicada por -2 (para el de posición $(3, 2)$). Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + (-2) F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + (-2) F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y ya hemos llegado, mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a la matriz A, a una matriz como la escrita en (2): sus dos primeras columnas son las dos primeras columnas de la matriz identidad I_3 y su última fila tiene todos los términos nulos.

Lo que acabamos de hacer con la matriz A admite generalización. El resultado general es este: dada una matriz de orden (n, m), de rango igual a $r \geqslant 1$, y con sus r primeros vectores columna linealmente independientes, es posible obtener, mediante transformaciones elementales (por filas) sucesivas aplicadas a la matriz dada, una de este tipo:

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m}\\
0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm}\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r\\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-r
\end{array}
\\
\quad\underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \dots\quad 0}}_{r}\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)}\quad \dots\quad a'_{1m}}}_{m-r}
\end{array}
\qquad . \qquad (3)$$

(Los números $a'_{1(r-1)}, \dots, a'_{rm}$ pueden ser cualesquiera.) Esta matriz, de orden (n, m) —como la dada—, puede describirse así: sus r primeras columnas (tantas como el rango) son las r primeras columnas de la matriz identidad I_n; sus $n - r$ últimas filas (tantas como la diferencia entre el número de filas de la matriz dada y el rango) tienen todos sus términos iguales a 0; y cada uno de los restantes términos, que son los situados entre las columnas $(r + 1)$-ésima y m-ésima y entre la filas primera y r-ésima (es decir, los denotados por $a'_{1(r+1)}, \dots, a'_{rm}$), puede ser igual a cualquier número; nótese que estos últimos términos ocupan $m - r$ columnas (tantas como la diferencia entre el número de columnas de la matriz dada y el rango).

Nota bene La matriz A que nos ha servido de ejemplo verifica las hipótesis de este resultado para $n = 3$, $m = 4$ y $r = 2$, pues es de orden $(3, 4)$, su rango es igual a 2, y sus *dos* primeros vectores columna son linealmente independientes (éstos son $(0, 2, -1)$ y $(1, 4, 0)$, que no son proporcionales). Se aprecia que el tipo de matriz escrito en (2), al cual queríamos llegar a partir de la matriz A, se ajusta al formato dado en (3). ▲

Quizá llame la atención en este resultado la exigencia de que los r primeros vectores columna de la matriz de partida tengan que ser linealmente independientes. Si esto no ocurre, es decir, si los r primeros vectores columna de la matriz de partida no son linealmente independientes, también es posible obtener una matriz como la (3) mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a la matriz de partida, pero ya no podemos exigir que todas estas transformaciones elementales sean *por filas*: alguna —y quizá más de una— deberá ser *por columnas*. Realmente, con transformaciones por columnas de tipo I (intercambio de columnas) será suficiente. Consideremos, por ejemplo, esta matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su rango es igual a 2, y sus tres vectores columna son $(1, 2, -1)$, $(2, 4, -2)$ y $(0, 1, 1)$. Los dos primeros no son linealmente independientes (nótese que son proporcionales), pero el primero y el tercero sí lo son. Si intercambiamos las columnas segunda y tercera (una transformación elemental por columnas de tipo I), obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

matriz que sí tiene sus dos primeros vectores columna linealmente independientes. Esta matriz sí podrá ser llevada, mediante transformaciones elementales sucesivas *exclusivamente por filas*, a una matriz de la forma (3), que en este caso particular toma este aspecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(nótese que $n = 3$, $m = 3$ y $r = 2$, con lo que $n - r = 1$ y $m - r = 1$). Buscamos primero llegar a una matriz que tenga en la primera columna los términos 1, 0 y 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación buscamos una matriz cuyos términos de la segunda columna sean 0, 1 y 0, pero sin alterar los que ya hay en la primera columna. Con una sola transformación más terminamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos decir que esta última matriz ha sido obtenida a partir de la matriz B tras la aplicación a ésta de transformaciones elementales sucesivas: la primera de ellas, un intercambio de columnas; las restantes, transformaciones por filas.

Hemos visto, entonces, que a partir de una matriz de orden (n, m), de rango igual a $r \geqslant 1$, y con sus r primeros vectores columna linealmente independientes, puede obtenerse, tras aplicarle sucesivamente ciertas transformaciones elementales por filas, una matriz de la forma (3). No queremos terminar este apartado sin fijarnos en algunos casos particulares. Cuando la matriz de partida tiene rango igual al número de filas: $r = n$, entonces resulta $n - r = 0$, y en la matriz (3) correspondiente "desaparecen" las filas inferiores que tengan todos sus términos nulos. Si, por ejemplo, la matriz de partida es de orden $(2, 4)$ y su rango es igual a 2, entonces llegamos, tras las transformaciones elementales pertinentes, a una matriz así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, cuando el rango es igual al número de columnas: $r = m$, entonces resulta $m - r = 0$, y en la matriz (3) correspondiente desaparecen las columnas de la derecha que contengan los términos que denotamos por $a'_{1(r+1)}, \ldots, a'_{rm}$. Por ejemplo, a partir de una matriz de orden $(4, 2)$ de rango igual a 2, y tras las transformaciones elementales oportunas, obtenemos esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si acontece que la matriz de partida tiene rango simultáneamente igual al número de filas y al número de columnas: $r = n = m$ (en particular, es cuadrada), entonces en la matriz (3) correspondiente desparecen tanto las filas de abajo (con todos sus términos nulos) como las columnas de la derecha (con los términos denotados por $a'_{1(r+1)}, \ldots, a'_{rm}$), y lo que queda es una matriz identidad: la del mismo orden que la matriz cuadrada de partida. Por ejemplo, si partimos de una matriz cuadrada de orden 3 y de rango igual a 3, obtenemos, tras las transformaciones elementales necesarias, la matriz identidad I_3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversa de una matriz cuadrada La *inversa* de una matriz cuadrada es otra matriz (también cuadrada, y del mismo orden que la primera) tal que el producto de ambas, tanto en un orden como en el otro, es igual a la matriz identidad. Más en concreto, la inversa de una matriz A cuadrada de orden n es otra matriz B, también cuadrada de orden n, para la cual se verifica: $AB = BA = I_n$. Consideremos, por ejemplo, estas dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos decir que la matriz B es inversa de la matriz A, pues se verifica:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Nótese que también podemos decir, por la misma razón, que la matriz A es inversa de la matriz B: son inversas una de la otra.

Cuando una matriz cuadrada admite inversa, se dice que es *invertible*. No todas las matrices cuadradas son invertibles. Por ejemplo, una matriz nula cuadrada, de cualquier orden, no es invertible, pues su producto con cualquier matriz es una matriz nula, de ninguna forma una matriz identidad. Cuando una matriz A es invertible, admite solamente una inversa, que se denota: A^{-1}. Con las matrices A y B del ejemplo del párrafo anterior, podemos escribir: $A^{-1} = B$; y también: $B^{-1} = A$.

En el texto se prueba un criterio muy importante para saber si una matriz cuadrada dada es o no invertible: una matriz cuadrada es invertible si y solamente si su rango toma el mayor valor posible (es decir, si y solamente si su rango coincide con su orden, que es el número de sus filas y también el de sus columnas). Por ejemplo, en el apartado anterior trabajamos con esta matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz cuadrada de orden 3, pero su rango es menor que 3 (es igual a 2, en concreto). No es, pues, invertible: no hay ninguna matriz cuadrada de orden 3 cuyo producto por B sea igual a la matriz identidad I_3. Por el contrario, consideremos esta matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

También es cuadrada de orden 3, y su rango —como puede calcular el lector— sí es igual a 3. Estamos, pues, ante una matriz invertible: sí existe alguna matriz cuadrada de orden 3 cuyo producto por C es igual a la matriz identidad I_3; tal matriz es la inversa de C, que se denota C^{-1}.

Pero, ¿cómo calcular la inversa de una matriz cuadrada de la cual sabemos que es invertible? Las transformaciones elementales nos proporcionan un procedimiento para este cálculo. Recordemos —del apartado anterior— que a partir de una matriz se puede llegar, mediante transformaciones elementales sucesivas, a una matriz de la forma (3) (cf. p. 168). Si la matriz de partida es cuadrada e invertible, entonces su rango coincide con el número de sus filas y con el número de sus columnas, y la matriz de la forma (3) que corresponde en este caso —recordemos lo visto al final del apartado citado— es la matriz identidad del mismo orden que la matriz de partida. Es decir: mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a una matriz cuadrada invertible, es posible obtener la matriz identidad. En el texto se prueba un resultado que nos proporciona el método buscado para calcular la inversa: las mismas transformaciones elementales sucesivas, y en el mismo orden, que permiten obtener la matriz identidad a partir de la matriz invertible permiten a su vez obtener la inversa de la matriz a partir de la matriz identidad. Más concretamente: si A es una matriz cuadrada de orden n, invertible, puede obtenerse la matriz identidad I_n (la del mismo orden que A) a partir de A mediante transformaciones elementales sucesivas: estas mismas transformaciones, en el mismo orden, se aplican ahora sobre I_n y obtenemos como resultado precisamente A^{-1}. A modo de ejemplo, calculemos la inversa de la matriz C del párrafo anterior. Lo primero que debemos hacer es aplicar transformaciones elementales sucesivas a la matriz C hasta obtener la matriz identidad I (la del mismo orden que C).[3] Obtenemos en la primera columna los términos 1, 0 y 0 tras dos transformaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

obtenemos en la segunda columna los términos 0, 1 y 0 (sin perturbar los de la primera) con dos transformaciones más:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow (-1/2) F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y, finalmente, obtenemos la última columna con los términos 0, 0 y 1 (sin variar las dos primeras) con otras dos transformaciones más:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + (1/2) F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y ya hemos llegado a la matriz identidad I_3. A continuación, debemos aplicar estas mismas seis transformaciones elementales, y en el mismo orden en el que las hemos ido obteniendo, a la matriz identidad I_3. La matriz a la que finalmente llegaremos

[3] Nótese que la matriz C tiene sus tres vectores columna linealmente independientes, pues su rango es igual a 3; es suficiente, pues, trabajar con transformaciones por filas. Esto ocurre así con cualquier matriz invertible: no es necesario trabajar con transformaciones por columnas.

será la inversa C^{-1}. Resulta:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftarrow F_2-2F_1} \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\leftarrow F_3-F_1} \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftarrow(-1/2)F_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1/2&0\\1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftarrow F_1-2F_2} \begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1/2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1\leftarrow F_1-F_3} \begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1/2&0\\1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftarrow F_2+(1/2)F_3} \begin{pmatrix}-2&1&-1\\3/2&-1/2&1/2\\1&-1/2&1\end{pmatrix}.$$

Esta última matriz es, como hemos dicho, la inversa de la matriz C:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1&-1\\3/2&-1/2&1/2\\1&-1/2&1\end{pmatrix}.$$

El lector puede verificar que efectivamente el producto de esta matriz por la matriz C, en un orden y en el otro, es igual a la matriz identidad I_3: $CC^{-1} = C^{-1}C = I_3$.

Traspuesta de una matriz Dada una matriz A de cualquier orden (n, m), su *traspuesta*, que se denota: A^t, es otra matriz de orden (m, n) tal que los términos de sus m filas son los términos de las m columnas de A, y los términos de sus n columnas son los de las n filas de A.[4] Veámoslo con un ejemplo. Consideremos esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&4\end{pmatrix}.$$

Es de orden $(2, 3)$, así que su traspuesta: A^t, es una matriz de orden $(3, 2)$. Informalmente, lo que en la matriz A son filas, en la matriz A^t son columnas, y viceversa; más en concreto, los términos de la primera fila de A son los términos de la primera columna de A^t, y los términos de la segunda fila de A son los de la segunda columna de A^t. La matriz A^t es, pues, la que tiene como términos de su primera columna los números 1, 3 y -1, y como términos de su segunda columna los números 0, 2 y 4:

$$A^t = \begin{pmatrix}1&0\\3&2\\-1&4\end{pmatrix}.$$

[4]Más formalmente: la matriz A^t tiene por vectores fila los vectores columna de la matriz A (en el mismo orden), y tiene por vectores columna los vectores fila de la matriz A (también en el mismo orden).

Otro ejemplo. Consideremos estas matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La primera es una matriz fila, esto es, con una sola fila, que se transformará en una única columna al *trasponer*; es decir, su traspuesta es una matriz columna; sus términos son obviamente los mismos que los de la matriz fila original. Análogamente, la segunda matriz de las anteriores, que es una matriz columna, tendrá por traspuesta una matriz fila. Las traspuestas de las dos matrices son, respectivamente, las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Si una matriz es cuadrada, su traspuesta es otra matriz cuadrada del mismo orden. ▲

En el texto figuran varias propiedades de la trasposición de matrices. Nos interesa destacar aquí la última: el rango de una matriz y el de su traspuesta coinciden. O dicho de otra forma (que ya apuntamos en el apartado dedicado al rango): el rango de una matriz también es igual al rango del sistema formado por sus vectores fila. Este resultado tiene una consecuencia práctica importante: las propiedades que ya conocemos del rango de una matriz también son válidas cambiando columnas por filas; en concreto:

- el rango de una matriz no varía si sumamos a una fila una combinación lineal de las demás;[5]
- al eliminar en una matriz una fila, el rango no varía si tal fila es igual a una combinación lineal de las demás, y el rango disminuye en 1 si la fila no es igual a una combinación lineal de las demás.

Asimismo, el procedimiento que describimos para calcular el rango de una matriz sigue siendo válido si cambiamos columnas por filas y viceversa. De acuerdo con esto, el rango de una matriz con una sola fila es igual a 0 si todos sus términos son nulos, y es igual a 1 si alguno es no nulo; por ejemplo:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Y el rango de una matriz de dos filas (supuesto que no todos los términos son nulos, lo que supondría rango 0) es igual a 1 si ambas filas son proporcionales, y es igual

[5]Entendiendo estas operaciones entre filas también término a término.

a 2 si no lo son;[6] verbigracia:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Finalmente, para calcular el rango de una matriz con tres filas o más, podemos intentar transformar la matriz dada en otra, del mismo orden y con el mismo rango, con esta propiedad: *una de sus columnas tiene nulos todos los términos excepto uno*; la fila a la que este término no nulo pertenezca se puede eliminar, disminuyendo el rango de la matriz en 1, y reduciendo de esta forma el problema al de una matriz con una fila menos. (Recuérdese que para una matriz de tres columnas o más proponíamos intentar transformarla en otra que tuviera una fila con todos los términos nulos excepto uno, y que eliminábamos la columna a la que este término no nulo pertenece, disminuyendo el rango en 1.) A modo de ejemplo, calculemos el rango de esta matriz de tres filas y cuatro columnas:

$$B = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Buscamos, pues, transformarla en otra, del mismo orden y con el mismo rango, que tenga alguna columna con todos sus términos nulos excepto uno. Intentemos, verbigracia, que tal columna sea la cuarta. Podemos dejar la primera fila como está (ya tiene no nulo su término de la cuarta columna), y sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por -1; esta operación arroja una nueva segunda fila, de términos -1, 2, 1 y 0. A continuación, eliminamos la primera fila y el rango disminuye en 1. Obtenemos:

$$\operatorname{rango} B = \operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= 1 + \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

La última matriz que hemos obtenido, tras eliminar la primera fila, tiene dos filas no proporcionales, luego su rango es 2. La matriz B tiene finalmente rango igual a 3.

Quizá el lector se haya percatado, en el cálculo del rango anterior, de que la operación que hemos llevado a cabo entre las filas segunda y primera de la matriz B para "anular" el término de posición $(2,4)$ (cuyo valor original era 1) es realmente

[6] La "proporcionalidad" de filas se debe entender de manera análoga a la de columnas: dos filas son proporcionales si es posible obtener una de ellas multiplicando la otra por algún número (esto es, multiplicando todos los términos de esta última por el número).

una transformación elemental por filas de tipo III; en concreto: $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$. Ya sabemos que las transformaciones elementales por filas, y también las transformaciones elementales por columnas, no hacen variar el rango de una matriz.

En la práctica, el rango de una matriz se calcula conjugando el método que acabamos de ejemplificar con la matriz B anterior (buscar una columna con todos los términos nulos salvo uno) con el método ya descrito en el apartado dedicado al rango unas páginas más atrás (buscar una fila). En definitiva, esto supone "hacer ceros" en la matriz con la ayuda de transformaciones elementales de tipo III (tanto por filas como por columnas), buscando las filas o las columnas con todos sus términos nulos excepto uno; ya sabemos que cuando tengamos una tal fila o columna, podremos reducir el problema al de una matriz con una columna menos o con una fila menos. Por otra parte, si en algún momento del proceso nos encontramos con alguna fila, o con alguna columna, que sea combinación de las demás, sabemos que podremos eliminarla sin que el rango varíe; en particular, se pueden eliminar, sin variar por ello el rango, las filas o las columnas que tengan todos sus términos nulos.

Veamos un último ejemplo de cálculo de un rango, el de esta matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Intentemos hacer ceros en la primera columna, donde ya hay dos. Dejamos el 1 de la posición $(1, 1)$ como está,[7] y aplicamos transformaciones elementales de tipo III para anular los términos de posición $(3, 1)$ y $(4, 1)$; con las transformaciones $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$ y $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1$ lo conseguimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1]{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

y podemos ecribir:

$$\operatorname{rango} T = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[7] Quizá se haya dado cuenta el lector de que al buscar una fila o una columna con todos sus términos nulos, excepto uno, resulta más cómodo que el término no nulo sea igual a 1. Detalles como este se aprenden poco a poco con la práctica.

después de eliminar la primera fila. Pero démonos cuenta de que ahora tenemos una columna con todos sus términos nulos: si la eliminamos, el rango no varía. Es habitual llevar a cabo estos dos últimos pasos de una vez: cuando ya tenemos una columna con todos sus términos nulos excepto uno, eliminamos la fila que corresponde al término no nulo, y también eliminamos la propia columna; este proceso hace disminuir el rango en 1, y nos lleva a una matriz con una fila menos y con una columna menos. (Lo mismo se haría si, en vez de una columna, tuviéramos una fila con todos sus términos nulos salvo uno.) Esquemáticamente:

$$\text{rango}\,T = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En esta última matriz, podemos darnos cuenta de que la tercera fila es proporcional a la primera, con lo que es posible decir de ella que es igual a una combinación lineal de las demás filas; eliminándola, no varía el rango:

$$\text{rango}\,T = 1 + \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la última matriz obtenida, ya tenemos una columna con todos sus términos nulos excepto uno:

$$\text{rango}\,T = 1 + \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 + \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz final tiene rango igual a 2, pues sus dos filas no son proporcionales (tampoco son proporcionales, por supuesto, sus dos columnas). Finalmente: rango $T = 4$.

III.1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

1. Definición de matriz Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo y sean n y m números enteros positivos. Una **matriz** A con **términos** en $\mathbb{K}$ de **orden** (n, m) es una disposición de $n \cdot m$ elementos de $\mathbb{K}$ en forma rectangular en n filas y m columnas, de las que diremos son las **filas** y **columnas** de la matriz A.

Del elemento de $\mathbb{K}$ que en una matriz A está situado en la fila i-ésima y en la columna j-ésima diremos es el **término** de A de posición (i, j); se le suele denotar: a_{ij}.

La notación habitual para la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (4$$

donde los términos de la i-ésima fila $(1 \leqslant i \leqslant n)$ son:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{im},$$

y los términos de la j-ésima columna $(1 \leqslant j \leqslant m)$ son:

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \dots,\ a_{nj}.$$

También se adopta la notación:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right),$$

o bien (cuando no hay riesgo de confusión): $A = \left(a_{ij}\right)$.

De dos matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ y $B = \left(b_{ij}\right)$ con términos en $\mathbb{K}$, ambas de orden (n, m) diremos son **iguales** si:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para cada } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y cada } 1 \leqslant j \leqslant m,$$

y escribiremos: $A = B$.

Nota Sólo se define la igualdad de dos matrices cuando ambas matrices son del mism orden. ▲

EJEMPLO 1 Consideremos el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. De una matriz con términos en $\mathbb{R}$ diremos es una **matriz real**. Tomemos $n = 3$ y $m = 2$. Una matriz real de orden $(n, m) = (3, 2)$ es una disposición de $3 \cdot 2 = 6$ números reales en 3 filas y 2 columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \pi & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es una matriz real de orden $(3,2)$: tiene 3 filas y 2 columnas. El término de A de posición $(1,2)$, que podemos denotar a_{12}, es el número real situado en la primera fila y en la segunda columna; es decir:

$$a_{12} = \sqrt{2}.$$

El término de A de posición $(3,2)$: a_{32}, es el número real situado en la tercera fila y en la segunda columna: $a_{32} = 1/2$.

También podemos denotar la matriz A de la forma:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 2\right).$$

2. *Tipos de matrices* De una matriz con términos en $\mathbb{K}$ de orden $(1, m)$ diremos es una **matriz fila**. Es decir, una matriz fila es una matriz con una sola fila.

Matriz fila

Matriz columna

De una matriz con términos en $\mathbb{K}$ de orden $(n, 1)$ diremos es una **matriz columna**. Es decir, una matriz columna es una matriz con una sola columna.

EJEMPLO 2 La matriz real:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz fila de orden $(1,3)$.

Nota bene Al escribir una matriz de la forma (4) no se escribe ninguna coma; por tanto, no hay que confundir la matriz fila, con términos reales, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con la terna de números reales: $(1, -1, 0)$, donde sí se utilizan comas. ▲

La matriz real:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz columna de orden $(3, 1)$.

La matriz real:

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz real de orden $(1, 1)$, y por consiguiente es tanto una matriz fila como una matriz columna. No se debe confundir la matriz real $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ con el número real 2.

Matriz cuadrada

Sea A una matriz con términos en $\mathbb{K}$. De A diremos es una **matriz cuadrada de orden** n si A es de orden (n, n), es decir, si tiene tanto n filas como n columnas.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, de los términos de posición $(1,1)$, $(2,2), \ldots, (n,n)$ diremos son los términos de la **diagonal principal** de A.

Matriz identidad (o unitaria)

De la matriz cuadrada de orden n que tiene sus términos de la diagonal principal iguales a 1, y sus restantes términos iguales a 0, diremos es la **matriz identidad**, o unitaria, de orden n, y se denota: I_n; es decir:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 3 La matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & e & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3: tiene tres filas y tres columnas. Los términos de la diagonal principal de A son: 2, $1/3$ y 0.

Las matrices identidad reales de orden 2 y 3 son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz nula

De una matriz con términos en $\mathbb{K}$ diremos es una **matriz cero** (o **matriz nula**), y la denotaremos: O, si todos sus términos son iguales a 0.

EJEMPLO 4 Las matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son tres matrices nulas, de órdenes respectivos: $(1,1)$, $(1,3)$ y $(2,3)$.

---

3. Matrices columna de una matriz Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Sea $1 \leqslant j \leqslant m$. Se define la j-ésima **matriz columna de la matriz** A, que se denota: A_j, como aquella matriz columna de orden $(n, 1)$ cuyos términos son los de la j-ésima columna de A. Es decir:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Utilizando las matrices columna de la matriz A, la **notación por columnas** de A es:

$$A = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_m\right).$$

Notación Las matrices columna de la matriz identidad I_n $(n \geqslant 1)$ se denotan: $E_1, E_2, \dots, E_n$; es decir:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y $I_n = \left(E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_n\right)$. ▲

EJEMPLO 5 Sea A la matriz con términos en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices columna primera, segunda y tercera de A son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A se puede escribir también: $A = \left(A_1 \mid A_2 \mid A_3\right)$.

EJEMPLO 6 Consideremos las matrices columna reales de orden $(3, 1)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con estas matrices columna podemos formar, por ejemplo, la matriz:

$$A = \left(C \mid D \mid E\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyas matrices columna son: $A_1 = C$, $A_2 = D$ y $A_3 = E$. También podemos formar la matriz:

$$B = \left(C \mid E \mid D\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

4. Matrices fila de una matriz Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Sea $1 \leqslant i \leqslant n$. Se define la i-ésima **matriz fila de la matriz** A como aquella matriz fila de orden $(1, m)$ cuyos términos son los de la i-ésima fila de A. Es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}.$$

Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son las matrices fila de la matriz A, la **notación por filas** de A es:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix}.$$

Notación Las matrices fila de la matriz identidad I_n $(n \geqslant 1)$ se denotan: $L_1, L_2, \dots, L_n$; es decir:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ L_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$I_n = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}.$$

▲

EJEMPLO 7 Dada la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

las matrices fila primera y segunda de A son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

EJEMPLO 8 Dadas las matrices fila reales de orden $(1,4)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

con ellas podemos formar, entre otras, la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} B \\ \hline C \\ \hline D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Vectores fila y vectores columna de una matriz Sea A una matriz con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n,m):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Vector columna Sea $1 \leqslant j \leqslant m$. El j-ésimo **vector columna** de A, que se denota: $\boldsymbol{a}_j$, es el vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas componentes son los términos de la j-ésima matriz columna de A. Es decir:

$$\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}).$$

Vector fila Sea $1 \leqslant i \leqslant n$. El i-ésimo **vector fila de** A es el vector de $\mathbb{K}^m$ cuyas componentes son los términos de la i-ésima matriz fila de A, es decir, es el vector: $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$.

Nota No deben ser confundidos matriz columna y vector columna, ni matriz fila y vector fila. ▲

EJEMPLO 9 Sea A la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de A son los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1,0) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_3 = (3,2).$$

El primer vector fila de A es el vector $(1,-1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

III.2 MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

1. Matriz asociada a una aplicación lineal en unas bases Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$. Gráficamente:

$$\mathbb{K}^m \xrightarrow{f} \mathbb{K}^n.$$

Fijemos unas bases: $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n)$, de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente. Resumiremos la elección de estas bases, gráficamente, de la manera siguiente:

$$\overset{V}{\mathbb{K}^m} \xrightarrow{f} \overset{W}{\mathbb{K}^n}.$$

La aplicación lineal f está completamente determinada una vez conocidas las imágenes por f de los vectores de una base de $\mathbb{K}^m$ (cf. proposición II.7, p. 122); por ejemplo, una vez conocidos los vectores: $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_m)$. Estos m vectores quedan unívocamente determinados en cuanto conocemos las n coordenadas de cada uno de ellos en una base de $\mathbb{K}^n$, que puede ser, por ejemplo, la base W.

Definición

Matriz asociada a una aplicación lineal en unas bases

Podemos construir a partir de la aplicación lineal f, elegidas las bases V de $\mathbb{K}^m$ y W de $\mathbb{K}^n$, una matriz A de orden (n, m) de la forma siguiente: los términos de la j-ésima columna de A son las n coordenadas en la base W del vector $f(\boldsymbol{v}_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. De la matriz A así construida se dice es la **matriz asociada** a f, o **representante de** f, en las bases V de $\mathbb{K}^m$ y W de $\mathbb{K}^n$.

Obsérvese que, una vez fijadas las bases V y W, la matriz asociada a f en estas bases es única, puesto que sus términos son las coordenadas de los vectores $f(\boldsymbol{v}_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ en la base W, que son únicas.

Nota bene Una matriz representante de una aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ es de orden (n, m). ▲

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

de la definición se deduce: la matriz A es la matriz asociada a la aplicación lineal f de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ en las bases $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ de $\mathbb{K}^m$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ precisamente si, en los vectores de la base V, f se comporta de la forma:

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \dots + a_{nj}\boldsymbol{w}_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \qquad (5$$

Dada la matriz A, y fijadas en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ las bases V y W, respectivamente, sabemos que existe una única aplicación lineal f de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ que verifica (5) (cf. proposición II.7, p. 122). En consecuencia, dada una matriz con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m), y fijadas unas bases en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, existe una única aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ tal que su matriz asociada en las bases fijadas es la matriz dada.

Debemos observar que si W es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, es decir:

$$W = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$

entonces:

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) = \boldsymbol{a}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

donde $\boldsymbol{a}_j$ es el j-ésimo vector columna de la matriz A. En otras palabras:

Matriz asociada cuando la base en el de llegada es la canónica

> Si la base seleccionada en el espacio de llegada es la canónica, entonces los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación lineal son las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida.

EJEMPLO 10 Consideremos la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definida por la expresión:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2, x_2).$$

Sean $B_C = ((1,0),(0,1))$ y $B'_C = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Gráficamente:

$$\overset{B_C}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\quad f \quad} \overset{B'_C}{\mathbb{R}^3}.$$

Determinemos la matriz A asociada a f en las bases B_C y B'_C.

La matriz A es de orden $(3,2)$, y se verifica:

- Los términos de la primera columna de A son las coordenadas en la base B'_C de la imagen por f del primer vector de la base B_C; es decir, las coordenadas en B'_C de la imagen por f de $(1,0)$. Se tiene:

$$f(1,0) = (1,2,0) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1),$$

y por tanto la primera matriz columna de A es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Los términos de la segunda columna de A son las coordenadas en la base B'_C de la imagen por f del segundo vector de la base B_C; es decir, las coordenadas en B'_C de la imagen por f de $(0,1)$. Se tiene:

$$f(0,1) = (1,-3,1) = 1(1,0,0) + (-3)(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

y por tanto la segunda matriz columna de A es:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz asociada a f en las bases canónicas B_C y B'_C —o, simplemente, la matriz asociada a f en las bases canónicas— es:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & | & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede observarse que, al estar considerando en el espacio de llegada $\mathbb{R}^3$ la base canónica, los vectores columna de la matriz A son las imágenes de los vectores de la base B_C de $\mathbb{R}^2$:

$$f(1,0) = (1,2,0) = \boldsymbol{a}_1 \quad \text{y} \quad f(0,1) = (1,-3,1) = \boldsymbol{a}_2.$$

Consideremos ahora las bases $B = ((1,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$, y $B' = ((1,1,1),(1,0,0),(0,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$. Gráficamente:

$$\overset{B}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\quad f \quad} \overset{B'}{\mathbb{R}^3}.$$

Hallemos la matriz C asociada a f en las bases B y B'.

La matriz C, al igual que la matriz A, es de orden $(3,2)$:

- Los términos de la primera columna de C son las coordenadas en la base B' de la imagen por f del primer vector de la base B; es decir, las coordenadas en B' de la imagen por f de $(1,1)$. Se tiene:

$$f(1,1) = (2,-1,1) = 1(1,1,1) + 1(1,0,0) + (-2)(0,1,0),$$

y por tanto las coordenadas de $f(1,1)$ en B' son: 1, 1 y -2, y la primera matriz columna de C es:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Los términos de la segunda columna de C son las coordenadas en la base B' de la imagen por f del segundo vector de la base B; es decir, las coordenadas en B' de la imagen por f de $(1,0)$. Se tiene:

$$f(1,0) = (1,2,0) = 0(1,1,1) + 1(1,0,0) + 2(0,1,0),$$

y por tanto las coordenadas de $f(1,0)$ en B' son: 0, 1 y 2, y la segunda matriz columna de C es:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, la matriz representante de f en las bases B y B' es:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & | & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observa que $A \neq C$. La matriz asociada a una aplicación lineal depende de las bases escogidas.

EJEMPLO 11 Consideremos una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$, es decir, una forma lineal sobre $\mathbb{R}^m$. Si A es una matriz representante de f, entonces A tiene que ser de orden $(1, m)$, esto es, si una matriz está asociada a una forma lineal, entonces es una matriz fila.

Por ejemplo, consideremos la forma lineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3.$$

La matriz fila A asociada a f en las bases canónicas es la que tiene por términos:

$$f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1),$$

es decir: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Un caso particular con una matriz unitaria

Proposición III.1 *Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$, y consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ la base $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n)$; gráficamente:*

$$\overset{W}{\mathbb{K}^n} \xrightarrow{\ f\ } \overset{W}{\mathbb{K}^n}.$$

Si la matriz asociada a f en las bases W y W es la matriz unitaria I_n, entonces la aplicación f es la aplicación identidad de $\mathbb{K}^n$.

Demostración Sea $1 \leqslant i \leqslant n$. Como la matriz asociada a f en las bases W y W es la matriz I_n, las coordenadas del vector $f(\boldsymbol{w}_i)$ en la base W son:

$$0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \qquad \text{(con 1 en el lugar } i\text{-ésimo)},$$

que son los términos de la i-ésima columna de I_n; por tanto:

$$f(\boldsymbol{w}_i) = 0\boldsymbol{w}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{w}_{i-1} + 1\boldsymbol{w}_i + 0\boldsymbol{w}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}_i.$$

Es decir: $f(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{w}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, y en consecuencia la aplicación lineal f coincide con la aplicación lineal identidad de $\mathbb{K}^n$ en una base de $\mathbb{K}^n$ (la base W). De la proposición II.7 (cf. p. 122) se deduce que la aplicación f es la aplicación identidad de $\mathbb{K}^n$. C.Q.D.

EJERCICIO 1 *Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por la expresión: $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$. Es claro que f no es la aplicación identidad de $\mathbb{R}^2$, pues por ejemplo: $f(1,1) = (1,2) \neq (1,1)$. Encontrar dos bases B y B' de $\mathbb{R}^2$ de forma que la matriz asociada a f en las bases B y B' sea*

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲

2. Aplicación lineal canónicamente asociada a una matriz Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$. Se verifica que existe una única aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ tal que A es su matriz asociada en las bases canónicas (B_C de $\mathbb{K}^m$ y B'_C de $\mathbb{K}^n$), y tal aplicación verifica que la imagen del vector $\boldsymbol{e}_j$ de la base canónica de $\mathbb{K}^m$ es igual al j-ésimo vector columna de A: $\boldsymbol{a}_j$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Definición

Aplicación lineal canónicamente asociada a una matriz

Dada una matriz A de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$, definimos la **aplicación lineal canónicamente asociada** a la matriz A, y la denotamos: $\mathcal{A}$, como la única aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ cuya matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ es A. Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} \overset{B_C}{\mathbb{K}^m} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \overset{B'_C}{\mathbb{K}^n} \\ \boldsymbol{e}_j & \dashrightarrow & \boldsymbol{a}_j \end{array} \qquad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Notación Para denotar la aplicación lineal canónicamente asociada a una matriz utilizaremos la misma letra que designa la matriz, pero en tipo caligráfico. Por ejemplo: A y $\mathcal{A}$, o B y $\mathcal{B}$. ▲

De la proposición III.1 (cf. p. 187) se deduce:

Aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz identidad

La aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$ canónicamente asociada a la matriz identidad I_n, es decir: $\mathcal{I}_n$, es la aplicación lineal identidad de $\mathbb{K}^n$.

EJEMPLO 12 Dada la matriz real:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calculemos la aplicación lineal canónicamente asociada a B.

La aplicación lineal canónicamente asociada a B será la aplicación lineal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que en la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, se comporta de la siguiente manera:

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_1, \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{b}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{b}_3,$$

siendo $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ y $\boldsymbol{b}_3$ los vectores columna de la matriz B:

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,0), \quad \boldsymbol{b}_2 = (1,2) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}_3 = (0,3).$$

Si (x_1, x_2, x_3) es un vector de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x_1,x_2,x_3) = \mathcal{B}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) &= x_1\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1) + x_2\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2) + x_3\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_3) \\ &= x_1(1,0) + x_2(1,2) + x_3(0,3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3);\end{aligned}$$

es decir, la aplicación $\mathcal{B}$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ siguiente:

$$(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3) \in \mathbb{R}^2.$$

III.3 EL ESPACIO VECTORIAL $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$

1. El conjunto $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$; adición de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz Dados un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y unos números enteros positivos n y m, con la notación:

$$\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}),$$

se designa el conjunto de las matrices de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$.

Adición de matrices

Definición

Sean A y B dos matrices de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$:

$$A = \big(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\big) \quad \text{y} \quad B = \big(b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\big).$$

Se define la **suma** de A y B, y se denota: $A + B$, como la matriz de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$:

$$A + B = \big(a_{ij} + b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\big).$$

Es decir, $A + B$ es la matriz que resulta de sumar los términos de la misma posición de A y B.

Es sencillo comprobar que la adición de matrices articula el conjunto $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ como grupo abeliano. El elemento neutro de $(\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}), +)$ es la matriz nula de orden (n, m), y el opuesto de una matriz A de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, que se denota: $-A$, es la matriz cuyos términos son los opuestos de los términos correspondientes de A, es decir, si $A = \big(a_{ij}\big)$, entonces:

$$-A = \big(-a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\big).$$

Nota bene La suma de dos matrices se ha definido únicamente cuando ambas matrices son del mismo orden. ▲

EJEMPLO 13 Consideremos el conjunto de las matrices reales de tres filas y dos columnas, es decir, el conjunto $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$.

Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son elementos de $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$. La suma de A y B es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) & 0 + 1 \\ -1 + 0 & 2 + 2 \\ 3 + 1 & 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matriz opuesta de A es:

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

El elemento neutro del grupo $(\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}), +)$ es:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición

Multiplicación de un escalar por una matriz

Sea A una matriz de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right),$$

y sea λ un elemento de $\mathbb{K}$. Se define el **producto** de λ por A, que se denota: λA, como la matriz de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$:

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right).$$

Es decir, la matriz λA es la matriz cuyos términos son los de A multiplicados por λ.

Se puede comprobar fácilmente que la adición de matrices y la multiplicación de matrices por los elementos de $\mathbb{K}$ articulan el conjunto $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ como espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 14 Si A y B son las matrices de $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces:

$$3B = 3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

y

$$(-1)A = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = -A.$$

La matriz asociada (en unas bases) a la suma de dos aplicaciones lineales es suma de las matrices asociadas correspondientes

Proposición III.2 *Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$. Fijemos unas bases: $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$, de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente; gráficamente:*

$$\overset{V}{\mathbb{K}^m} \xrightarrow{f,\,g} \overset{W}{K^n}.$$

Si A y B son las matrices de orden (n, m) asociadas en las bases V y W a f y a g, respectivamente, entonces la matriz asociada en las bases V y W a la aplicación lineal $f + g$ es la suma de A y B: $A + B$.

Demostración Pongamos:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right) \quad \text{y} \quad B = \left(b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right).$$

Por ser A y B las matrices asociadas en las bases V y W a f y a g, respectivamente, para cada $1 \leqslant j \leqslant m$ se tiene:

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{w}_n \quad \text{y} \quad g(\boldsymbol{v}_j) = b_{1j}\boldsymbol{w}_1 + b_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{w}_n,$$

de lo que se deduce:

$$(f+g)(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_j) + g(\boldsymbol{v}_j) = (a_{1j} + b_{1j})\boldsymbol{w}_1 + (a_{2j} + b_{2j})\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (a_{nj} + b_{nj})\boldsymbol{w}_n$$

$(1 \leqslant j \leqslant m)$; y como los términos de la j-ésima matriz columna de la matriz asociada a $f + g$ en las bases V y W son las coordenadas en la base W del vector $(f+g)(\boldsymbol{v}_j)$, esta matriz columna es:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} + b_{1j} \\ a_{2j} + b_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} + b_{nj} \end{pmatrix},$$

que coincide con la j-ésima matriz columna de $A + B$.

En conclusión, $A + B$ es la matriz asociada a la aplicación lineal $f + g$ en las bases V y W.

C.Q.D.

La matriz asociada (en unas bases) al producto de un escalar por una apl. lin. es igual al producto del escalar por la matriz asociada a la apl. lin.

Proposición III.3 *Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$. Fijemos unas bases $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n)$, de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente; gráficamente:*

$$\overset{V}{\mathbb{K}^m} \xrightarrow{\quad f \quad} \overset{W}{\mathbb{K}^n}.$$

Si A es la matriz de orden (n, m) asociada en las bases V y W a f, y λ es un elemento de $\mathbb{K}$, entonces la matriz asociada en las bases V y W a la aplicación lineal λf es el producto de λ por A: λA.

Demostración Pongamos $A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right)$. Como A es la matriz asociada a f en V y W, se tiene: $f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{w}_n$, para cada $1 \leqslant j \leqslant m$. En consecuencia:

$$(\lambda f)(\boldsymbol{v}_j) = \lambda f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + \lambda a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda a_{nj}\boldsymbol{w}_n,$$

y por tanto la j-ésima matriz columna de la matriz asociada a λf en las bases V y W es:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{1j} \\ \lambda a_{2j} \\ \vdots \\ \lambda a_{nj} \end{pmatrix},$$

la cual coincide con la j-ésima matriz columna de la matriz λA. En conclusión, la matriz asociada en las bases V y W a la aplicación lineal λf es λA. c.q.d.

EJEMPLO 15 Dadas las aplicaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2) \quad \text{y} \quad g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_2),$$

hallemos las matrices asociadas en las bases canónicas a las aplicaciones: $f + g$, $2g$ y $f - 2g$.

Las matrices asociadas a f y a g en las bases canónicas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente, como el lector puede comprobar fácilmente. De las proposiciones III.2 y III.3 (cf. pp. 191 y 192, respectivamente) se deduce que las matrices asociadas en las bases canónicas a las aplicaciones lineales $f + g$, $2g$ y $f - 2g$ son, respectivamente, las siguientes:

- $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $2B = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$
- $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Relación entre los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ y $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ La siguiente proposición resume la relación existente entre las aplicaciones lineales y las matrices.

Proposición III.4 *Los espacios vectoriales: $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ y $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, ambos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, son isomorfos.*

Demostración Definimos una aplicación: $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, de la siguiente manera: dada una aplicación lineal f de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$, es decir, un elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, $\Upsilon(f)$ es la (única) matriz de orden (n, m) asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$.

La aplicación Υ es lineal. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$. Si A es la matriz asociada a f en las bases canónicas, es decir: $A = \Upsilon(f)$, y B es la matriz asociada a g (también en las bases canónicas), esto es: $B = \Upsilon(g)$, entonces de la proposición III.2 (cf. p. 191) se deduce que la matriz asociada a $f + g$ en las bases canónicas —que es $\Upsilon(f + g)$— es $A + B$: $\Upsilon(f + g) = A + B = \Upsilon(f) + \Upsilon(g)$. Si λ es un escalar, de la proposición III.2 (cf. p. 191) se deduce que la matriz asociada a la aplicación lineal λf en las bases canónicas es λA: $\Upsilon(\lambda f) = \lambda A = \lambda \Upsilon(f)$. En conclusión, la aplicación Υ es lineal de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ en $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$.

La aplicación Υ es biyectiva. Dada una matriz A de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$, es decir, un elemento de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, la aplicación lineal canónicamente asociada a A: $\mathcal{A}$, es la única aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es A. Esto es: $\mathcal{A}$ es el único elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ que verifica que su imagen por Υ es igual a A: $\Upsilon(\mathcal{A}) = A$. En consecuencia, Υ es biyectiva.

Al ser la aplicación Υ lineal y biyectiva de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ en $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, es un isomorfismo, y por tanto los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ y $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ son isomorfos. C.Q.D.

III.4 PRODUCTO DE MATRICES

1. Definición del producto de matrices El producto de dos matrices se define de esta forma:

El producto de dos matrices

Definición

Si A y B son dos matrices con términos en $\mathbb{K}$ de órdenes (n, m) y (m, p), respectivamente:

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right) \quad \text{y} \quad B = \left(b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p\right),$$

el **producto** de A por B es $C = \left(c_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p\right)$, matriz de orden (n, p), de términos:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p,$$

y se escribe: $C = AB$.

Diremos también que C es el **producto por la izquierda** de la matriz B por la matriz A, o que es el **producto por la derecha** de la matriz A por la matriz B.

Nota bene El producto de A por B (en este orden) se ha definido cuando el número de columnas de la primera matriz: A, coincide con el número de filas de la segunda: B. En otro caso, el producto no está definido. Si el producto de A por B está definido, entonces AB es una matriz que tiene tantas filas como A y tantas columnas como B. ▲

EJEMPLO 16 Consideremos las matrices reales $A = \left(a_{ij}\right)$ y $B = \left(b_{ij}\right)$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El producto de A por B está definido, pues los órdenes de A y B son $(2,2)$ y $(2,3)$, respectivamente, y el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Sin embargo, el producto de B por A no está definido, pues el número de columnas de B, que es 3, es diferente del número de filas de A, que es 2.

Calculemos entonces el producto AB. Será una matriz $C = \left(c_{ij}\right)$ de orden $(2,3)$. Los términos de C son por definición:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 3.$$

Es decir:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0,$$

y análogamente: $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 1$, $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = -1$ y $c_{23} = 3$, y por tanto

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para el cálculo del término c_{ij}, es decir, del término de posición (i,j) del producto AB, sólo intervienen los términos de la i-ésima fila de A y los de la j-ésima columna de B: se observa que c_{ij} es la suma de los productos dos a dos de los términos de la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B. Esquemáticamente:

$$\begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \quad (j) \\ \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & b_{mj} & \dots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad (j) \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array},$$

donde: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$.

EJEMPLO 17 Consideremos las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los órdenes de las matrices A y B son $(2,3)$ y $(3,2)$, respectivamente, y por tanto está definido el producto de A por B y será una matriz C de orden $(2,2)$.

Calculemos detalladamente el término c_{11}: intervienen exclusivamente los términos de la primera fila de A:

$$1, \quad 0 \quad \text{y} \quad -1,$$

y los de la primera columna de B:

$$0, \quad 1 \quad \text{y} \quad 1,$$

y el término c_{11} es igual a la suma de los productos dos a dos de los términos de estas fila y columna:

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -1.$$

El término c_{12} es la suma de los productos dos a dos de los términos de la primera fila de A y la segunda columna de B: $c_{12} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = 2$. Y análogamente: $c_{21} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$ y $c_{22} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = -2$.

En conclusión:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 18 Sean las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Los órdenes de A y B son: $(1,3)$ y $(3,1)$, respectivamente. El producto por la izquierda de B por A, es decir, el producto de A por B, está definido y tiene orden $(1,1)$. Se tiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}.$$

El producto por la izquierda de A por B, es decir, el producto de B por A, también está definido, pero tiene orden $(3,3)$. Se tiene:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2 *Sean A y B dos matrices con términos en $\mathbb{K}$ tales que está definido el producto de A por B y también el de B por A. Demostrar que si el orden de las matrices AB y BA es el mismo, entonces A y B deben ser cuadradas y del mismo orden.* ▲

2. Productos dados por filas o por columnas El producto de dos matrices admite una notación sencilla cuando la segunda matriz viene dada por columnas o la primera viene dada por filas.

Producto de dos matrices dado por columnas

Proposición III.5 *Sean las matrices con términos en $\mathbb{K}$:*

$$A = \left(a_{ij}\right) \quad y \quad B = \left(b_{ij}\right)$$

de órdenes (n, m) y (m, p), respectivamente. Si la notación de B por columnas es:

$$B = \left(B_1 \mid B_2 \mid \dots \mid B_p\right),$$

entonces:

$$AB = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \dots \mid AB_p\right),$$

es decir:

$$A\left(B_1 \mid B_2 \mid \dots \mid B_p\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \dots \mid AB_p\right).$$

En otras palabras, la j-ésima matriz columna del producto AB es igual al producto de la matriz A por la j-ésima matriz columna de B ($1 \leqslant j \leqslant p$).

Demostración Sean las matrices $C = \left(c_{ij}\right)$ y $D = \left(d_{ij}\right)$ siguientes:

$$C = AB \quad y \quad D = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \dots \mid AB_j \mid \dots \mid AB_p\right).$$

Queremos comprobar que estas dos matrices, ambas de orden (n, p), son iguales, para lo cual hemos de comprobar se verifica:

$$c_{ij} = d_{ij}, \quad \text{para cada } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y } 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Por un lado, por definición de AB se tiene:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}. \qquad (1)$$

Por otro lado, el término d_{ij} de la matriz D es el situado en la fila i-ésima y en la columna j-ésima, y por tanto es el término de la fila i-ésima de la matriz columna:

$$AB_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix},$$

es decir:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}. \tag{7}$$

De (6) y (7) se deduce que $c_{ij} = d_{ij}$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y cada $1 \leqslant j \leqslant p$. En conclusión:

$$AB = A\left(B_1 \mid B_2 \mid \ldots \mid B_p\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \ldots \mid AB_p\right).$$

C.Q.D.

EJEMPLO 19 Consideremos las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el producto AB utilizando la proposición III.5.

La expresión de B en notación por columnas es: $B = \left(B_1 \mid B_2 \mid B_3\right)$, siendo:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \text{y} \; B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la proposición III.5 se verifica:

$$AB = A\left(B_1 \mid B_2 \mid B_3\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid AB_3\right).$$

Es decir:

- la primera matriz columna de AB es:

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix},$$

- la segunda matriz columna de AB es:

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- la tercera matriz columna de AB es AB_3, y puesto que $B_3 = B_1$, resulta:

$$AB_3 = AB_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Producto de dos matrices dado por filas

Proposición III.6 *Sean A y B matrices con términos en $\mathbb{K}$ de órdenes (n, m) y (m, p), respectivamente. Si la notación de A por filas es:*

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix},$$

entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} F_1 B \\ \hline F_2 B \\ \hline \vdots \\ \hline F_n B \end{pmatrix},$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} F_1 B \\ \hline F_2 B \\ \hline \vdots \\ \hline F_n B \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, la i-ésima matriz fila del producto AB es igual al producto de la i-ésima matriz fila de A por B $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

La demostración de esta proposición es análoga a la de la proposición III.5 (cf. p. 196) y por ello se omite.

EJEMPLO 20 Consideremos las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el producto AB utilizando la proposición III.6.

La expresión de A en notación por filas es:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline F_3 \end{pmatrix},$$

siendo:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la proposición III.6 se verifica:

$$AB = \left(\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline F_3 \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c} F_1B \\ \hline F_2B \\ \hline F_3B \end{array}\right).$$

Es decir:

- la primera matriz fila de AB es:

$$F_1B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

- la segunda matriz fila de AB es:

$$F_2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

- la tercera matriz fila de AB es F_3B, y puesto que $F_3 = F_1$, resulta:

$$F_3B = F_1B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

3. La composición de aplicaciones lineales y el producto de matrices Consideremos una aplicación lineal f de $\mathbb{K}^p$ en $\mathbb{K}^m$, y una aplicación lineal g de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$; gráficamente:

$$\mathbb{K}^p \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{K}^m \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{K}^n.$$

Y fijemos también unas bases:

$$V = \left(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\right), \; U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m) \;\text{ y }\; W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n),$$

de $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente. Gráficamente:

$$\overset{V}{\mathbb{K}^p} \xrightarrow{\quad f \quad} \overset{U}{\mathbb{K}^m} \xrightarrow{\quad g \quad} \overset{W}{\mathbb{K}^n}.$$

Consideremos las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g en estas base Más en concreto, por un lado, sea

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

la matriz —de orden (m, p)— asociada a la aplicación lineal f en las bases V (de $\mathbb{K}$ y U (de $\mathbb{K}^m$). Es decir: la j-ésima matriz columna de B tiene por términos las coord nadas del vector $f(\boldsymbol{v}_j)$ en la base U:

$$f(\boldsymbol{v}_j) = b_{1j}\boldsymbol{u}_1 + b_{2j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_{mj}\boldsymbol{u}_m, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Y, por otro lado, sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

la matriz —de orden (n, m)— asociada a la aplicación lineal g en las bases U (de $\mathbb{K}$ y W (de $\mathbb{K}^n$). Esto es: los términos de la k-ésima matriz columna de A son las coo denadas del vector $g(\boldsymbol{u}_k)$ en la base W:

$$g(\boldsymbol{u}_k) = a_{1k}\boldsymbol{w}_1 + a_{2k}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nk}\boldsymbol{w}_n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Denotemos por h la aplicación compuesta $g \circ f$: $h = g \circ f$; entonces h es un aplicación lineal de $\mathbb{K}^p$ en $\mathbb{K}^n$. Sea $D = \left(d_{ij}\right)$ la matriz de orden (n, p) asociada a en las bases V (de $\mathbb{K}^p$) y W (de $\mathbb{K}^n$). Determinemos los términos d_{ij} de la matriz D.

La j-ésima matriz columna de D tiene por términos las coordenadas del vec tor $h(\boldsymbol{v}_j)$ en la base W. Se tiene:

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{v}_j) &= [g \circ f](\boldsymbol{v}_j) = g(f(\boldsymbol{v}_j)) \\ &= g(b_{1j}\boldsymbol{u}_1 + b_{2j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_{mj}\boldsymbol{u}_m) \\ &= b_{1j}g(\boldsymbol{u}_1) + b_{2j}g(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + b_{mj}g(\boldsymbol{u}_m) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}g(\boldsymbol{u}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}(a_{1k}\boldsymbol{w}_1 + a_{2k}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nk}\boldsymbol{w}_n) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{kj}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{ik}b_{kj}\boldsymbol{w}_i + \cdots + a_{nk}b_{kj}\boldsymbol{w}_n \end{aligned}$$

(donde se ha utilizado (8) en la segunda igualdad, y (9) en la quinta), es decir:

$$h(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{kj}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{ik}b_{kj}\boldsymbol{w}_i + \cdots + a_{nk}b_{kj}\boldsymbol{w}_n. \tag{10}$$

El término d_{ij} es la i-ésima coordenada del vector $h(\boldsymbol{v}_j)$ en la base W, esto es, el coeficiente de $\boldsymbol{w}_i$ en la expresión de $h(\boldsymbol{v}_j)$ como combinación lineal de $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$, expresión que es el segundo miembro de (10). Por tanto:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{11}$$

Por otro lado, es inmediato comprobar que está definido el producto de A por B. Por definición, el término de posición (i,j) de la matriz AB es:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \tag{12}$$

para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y cada $1 \leqslant j \leqslant p$. De (11) y (12) se deduce: $D = AB$.

Hemos demostrado, pues, la siguiente

Composición de apl. lin. y producto de matr. asociadas

Proposición III.7 *Si B es la matriz asociada a una aplicación lineal f de $\mathbb{K}^p$ en $\mathbb{K}^m$ en las bases V y U, y A es la matriz asociada a una aplicación lineal g de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ en las bases U y W, entonces la matriz asociada a la aplicación lineal $g \circ f$ (de $\mathbb{K}^p$ en $\mathbb{K}^n$) en las bases V y W es el producto de A por B: AB.*

Producto de matrices y composición de apl. lin. canónicamente asociadas

Corolario *Si A y B son dos matrices con términos en $\mathbb{K}$ de órdenes (n,m) y (m,p), respectivamente, y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son sus aplicaciones lineales canónicamente asociadas, entonces la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz producto de A por B: AB, es la aplicación compuesta: $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$.*

EJEMPLO 21 Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ las aplicaciones lineales, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, respectivamente, dadas por:

$$\mathcal{B}(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2),$$
$$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - 2x_3).$$

Determinemos la matriz asociada a la aplicación compuesta $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ en las bases canónicas.

Gráficamente, la situación es la siguiente:

$$\overset{B_C}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\ \mathcal{B}\ } \overset{B'_C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{\ \mathcal{A}\ } \overset{B'_C}{\mathbb{R}^3},$$

donde B_C denota la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y B'_C la de $\mathbb{R}^3$. Obsérvese que, de acuerdo con el enunciado, tomamos las bases canónicas para el primer espacio y para el tercero; para el segundo, también tomamos la base canónica, aunque sólo por comodidad.

La matriz asociada a la aplicación lineal $\mathcal{B}$ en las bases canónicas correspondientes es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

puesto que: $\mathcal{B}(1,0) = (1,1,2)$ y $\mathcal{B}(0,1) = (1,-1,1)$, y las coordenadas de los vectores $(1,1,$ y $(1,-1,1)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son: $1, 1, 2$, y $1, -1, 1$, respectivamente.

La matriz asociada a la aplicación lineal $\mathcal{A}$ en las bases canónicas correspondientes, pr cediendo análogamente, es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De la proposición III.7 (cf. p. 201) se deduce que la matriz asociada a la aplicación $\mathcal{A} \circ$ en las bases canónicas correspondientes es el producto de A por B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si calculamos la imagen del vector $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ por la aplicación $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ partir de las definiciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, obtenemos: $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](1,0) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(1,0))$, y se obser que $(-1,4,3)$ es el primer vector columna de AB.

---

4. Propiedades del producto de matrices En este apartado consideraremos matrices con términos en un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Con la notación:

$$\underset{(n,m)}{A}$$

queremos decir que A es una matriz de orden (n, m). Se verifica:

- *La multiplicación de matrices es asociativa:*

$$\underset{(n,m)}{A} \left(\underset{(m,p)}{B} \underset{(p,q)}{C} \right) = \left(\underset{(n,m)}{A} \underset{(m,p)}{B} \right) \underset{(p,q)}{C}.$$

  Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las aplicaciones lineales canónicamente asociadas a las matrices A, y C, respectivamente, por la asociatividad de la composición de aplicaciones, se tien $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C}$, y de la proposición III.7 (cf. p. 201) se deduce que la matr asociada en las bases canónicas a $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$ es $A(BC)$, y que la asociada en las bases canónicas a $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C}$ es $(AB)C$, y por tanto: $A(BC) = (AB)C$.

- *La multiplicación de matrices es distributiva, tanto por la derecha como por la izquierda, respecto de la adición de matrices:*

$$\underset{(n,m)}{A} \left(\underset{(m,p)}{B_1} + \underset{(m,p)}{B_2} \right) = AB_1 + AB_2 \quad ,$$

y

$$\left(\underset{(n,m)}{A_1} + \underset{(n,m)}{A_2} \right) \underset{(m,p)}{B} = A_1 B + A_2 B.$$

Se deduce inmediatamente de la definición del producto de matrices y de la propiedad distributiva de la operación $\cdot$ respecto de la operación $+$ del cuerpo $\mathbb{K}$.

- *Si I_n y I_m son las matrices identidad de órdenes n y m, respectivamente, entonces:*

$$\underset{(n,n)}{I_n} \underset{(n,m)}{A} = \underset{(n,m)}{A} = \underset{(n,m)}{A} \underset{(m,m)}{I_m}.$$

Si $\mathcal{I}_n$ y $\mathcal{A}$ son las aplicaciones lineales canónicamente asociadas a las matrices I_n y A, respectivamente (y por tanto $\mathcal{I}_n$ es la aplicación identidad de $\mathbb{K}^n$), entonces la aplicación lineal canónicamente asociada al producto $I_n A$ es: $\mathcal{I}_n \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$, y por tanto: $I_n A = A$. Análogamente, se demostraría que $AI_m = A$.

- *El producto, tanto por la izquierda como por la derecha, de una matriz por una matriz cero es otra matriz cero:*

$$\underset{(p,n)}{O} \underset{(n,m)}{A} = \underset{(p,m)}{O} \quad y \quad \underset{(n,m)}{A} \underset{(m,q)}{O} = \underset{(n,q)}{O}.$$

Es consecuencia inmediata del hecho de que los términos de una matriz nula son nulos y de la definición del producto de matrices.

EJERCICIO 3 *Sean A y B dos matrices con términos en $\mathbb{K}$ de órdenes (n, m) y (m, p), respectivamente, y sea α un elemento de $\mathbb{K}$. Demostrar se verifica la igualdad: $A(\alpha B) = \alpha(AB)$.* ▲

EJERCICIO 4 *Si A es una matriz cuadrada con términos en $\mathbb{K}$, el producto de A por A está definido; la matriz AA se denota por A^2: $A^2 = AA$. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden con términos en $\mathbb{K}$, se tiene: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.* ▲

EJERCICIO 5 *Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$. Demostrar que la j-ésima matriz columna de A es igual al producto por la derecha de A por la j-ésima matriz columna de la matriz identidad I_m; es decir: $A_j = AE_j$, para cada $1 \leqslant j \leqslant m$.*

También, demostrar que la i-ésima matriz fila de A, F_i, es igual al producto por la izquierda de A por la i-ésima matriz fila de la matriz identidad I_n; esto es: $F_i = L_i A$, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. ▲

EJERCICIO 6 *Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$, y sea X la matriz columna con términos en $\mathbb{K}$:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Demostrar se verifica: $AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son las matrices columna de la matriz A. ▲

5. La no conmutatividad de la multiplicación de matrices Sean A y B dos matrices con términos en $\mathbb{K}$. Si el producto AB es una matriz de orden diferente al del producto BA, entonces, obviamente, la matriz AB es distinta de la matriz BA. Supongamos, pues, que AB y BA son del mismo orden; entonces (cf. ejercicio 2, p. 196) las matrices A y B son cuadradas y del mismo orden. En estas condiciones, diremos que las matrices A y B **conmutan** si $AB = BA$.

Sea n el orden de las matrices cuadradas A y B. Si $n = 1$, entonces $AB = BA$, como consecuencia de que estamos considerando conmutativo el cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Sin embargo, si $n \geqslant 2$, el producto AB no es necesariamente igual al producto BA.

EJEMPLO 22 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ —y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo—, y A y B son las matrices cuadradas, de orden 1, $A = \begin{pmatrix}\alpha\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}\beta\end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$AB = \begin{pmatrix}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\end{pmatrix} = BA.$$

EJEMPLO 23 Las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

no conmutan, pues:

$$AB = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Es fácil mostrar ejemplos de matrices cuadradas de órdenes superiores a 2 construidas a partir de las matrices A y B y que no conmutan. Por ejemplo, si $n = 4$, el lector puede comprobar que no conmutan las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

En conclusión:

La multiplicación de matrices cuadradas de orden n ($n \geqslant 2$) no es conmutativa.

Nota bene Afirmar que la multiplicación de matrices cuadradas de orden mayor que 1 no es conmutativa no excluye que haya matrices que conmuten. Por ejemplo, la matriz identidad I_n conmuta con cualquier matriz cuadrada de orden n. ▲

EJERCICIO 7 *Buscar dos matrices A y B, cuadradas de orden 2, tales que: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.* ▲

6. Representación matricial de la imagen de un vector Consideremos una aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$, y sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

la matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$ asociada a la aplicación lineal $\mathcal{A}$ en las bases canónicas; y, como es habitual, sea A_j la j-ésima matriz columna de A, y sea $\boldsymbol{a}_j$ el j-ésimo vector columna de A $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} \overset{B_C}{\mathbb{K}^m} & \xrightarrow{\quad \mathcal{A} \quad} & \overset{B_C'}{\mathbb{K}^n} \\ \boldsymbol{e}_j & \dashrightarrow & \boldsymbol{a}_j, \end{array}$$

donde $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ es la base canónica de $\mathbb{K}^m$, y B_C' es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vectores de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente, y sean X y Y las matrices columna cuyos términos son las componentes de los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, respectivamente; es decir:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Entonces se verifica:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \iff AX = Y, \tag{13}$$

como consecuencia de la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} &\iff \mathcal{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_j\boldsymbol{e}_j + \dots + x_m\boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{y} \\ &\iff x_1\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) + \dots + x_j\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_j) + \dots + x_m\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{y} \\ &\iff x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_j\boldsymbol{a}_j + \dots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{y} \\ &\iff x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_jA_j + \dots + x_mA_m = Y \\ &\iff AX = Y \end{aligned}$$

(donde la cuarta equivalencia es una consecuencia inmediata de la definición de las matrices columna A_j y Y, y de los vectores columna $\boldsymbol{a}_j$ y $\boldsymbol{y}$, y la última equivalencia se probó en el ejercicio 6 (cf. p. 203)).

EJEMPLO 24 Calculemos, utilizando la equivalencia (13), la imagen de un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ por la aplicación lineal A de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ canónicamente asociada a la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

y las componentes de la imagen por A del vector (x_1, x_2, x_3) son los términos de esta última matriz columna; es decir: $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2 + x_3)$.

EJEMPLO 25 El producto de matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

puede ser interpretado, teniendo en cuenta la equivalencia (13), de la siguiente manera: el vector $(-1, -2)$ de $\mathbb{R}^2$ es la imagen del vector $(1, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ por la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea f una aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$, y fijemos unas bases de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$, respectivamente: $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$. Sea:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a f en las bases V y W; es decir:

$$f(\boldsymbol{v}_j) = b_{1j}\boldsymbol{w}_1 + b_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{w}_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Si $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_j\boldsymbol{v}_j + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m$ es un vector dado de $\mathbb{K}^m$, y denotamos por $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n$ el vector de $\mathbb{K}^n$ que es imagen de x por f: $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, entonces los escalares y_1, y_2, ..., y_n vienen determinados por la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \tag{14}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &\Longrightarrow \boldsymbol{y} = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_j\boldsymbol{v}_j + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m) \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} x_j f(\boldsymbol{v}_j) \\ &\Longrightarrow y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n = \sum_{j=1}^{m} x_j(b_{1j}\boldsymbol{w}_1 + b_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{w}_n), \end{aligned}$$

e igualando los coeficientes de $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j b_{1j}, \quad y_2 = \sum_{j=1}^{m} x_j b_{2j}, \quad \ldots, \quad y_n = \sum_{j=1}^{m} x_j b_{nj};$$

pero estas n igualdades pueden escribirse conjuntamente de la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} x_j B_j, \tag{15}$$

donde B_j es la j-ésima matriz columna de B $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Finalmente, la relación matricial (15) es la misma que la relación matricial (14) (cf. ejercicio 6, p. 203).

EJEMPLO 26 Sean $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ las bases de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, formadas por los vectores:

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,0,1), \quad \text{y} \quad \boldsymbol{w}_1 = (1,1),\ \boldsymbol{w}_2 = (0,-2);$$

y consideremos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada en las bases V y W es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, calculemos la imagen por f del vector $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3$. Si denotamos de la forma: $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2$ al vector de $\mathbb{R}^2$ que es imagen de $\boldsymbol{x}$ por f: $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

y por tanto: $y_1 = 1$ y $y_2 = -8$, y $f(2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3) = 1\boldsymbol{w}_1 - 8\boldsymbol{w}_2$.

En segundo lugar, calculemos la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, las cuales respectivamente denotamos: $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ y $B'_C = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. Sabemos calcular la imagen por f de un vector cuando éste viene expresado como combinación lineal de los vectores de la base V. Debemos expresar, pues, los vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ en la base V.

Se verifica:

- El vector $\boldsymbol{e}_1$ expresado en la base V es:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3,$$

y como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

entonces:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 0\boldsymbol{w}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2 = 0(1,1) + \frac{1}{2}(0,-2) = (0,-1) = -\boldsymbol{e}'_2.$$

- El vector $\boldsymbol{e}_2$ es:

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3,$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix},$$

luego:

$$f(\boldsymbol{e}_2) = 1\boldsymbol{w}_1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{w}_2 = (1,4) = \boldsymbol{e}'_1 + 4\boldsymbol{e}'_2.$$

- Por último, el vector $\boldsymbol{e}_3$ es:

$$\boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_3,$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix},$$

y entonces:

$$f(\boldsymbol{e}_3) = 1\boldsymbol{w}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{w}_2 = (1,-2) = \boldsymbol{e}'_1 - 2\boldsymbol{e}'_2.$$

En resumen:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}'_2, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}'_1 + 4\boldsymbol{e}'_2 \quad \text{y} \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}'_1 - 2\boldsymbol{e}'_2,$$

y por tanto las matrices columna de la matriz asociada a f en las bases canónicas son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, la matriz asociada a f en las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

y teniendo en cuenta la equivalencia (13): $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, -x_1 + 4x_2 - 2x_3)$, ya que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

III.5 RANGO DE UNA MATRIZ

1. Definición de rango de una matriz El rango de una matriz se define como el rango de sus vectores columna:

Rango de una matriz

> Definición
>
> Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$. El **rango de** A, que se denota: rango A, es el rango de los vectores columna de A. Es decir:
>
> $$\text{rango}\, A = \text{rango}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)\,,$$
>
> donde $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ son los m vectores columna de A.

EJEMPLO 27 Calculemos el rango de la matriz con términos en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de A son los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0,-1,1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1,0,2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (0,1,-1) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_5 = (-1,1,-3).$$

Para calcular su rango hacemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'_2 &= \boldsymbol{a}_2 &&= (0,-1,1), \\ \boldsymbol{a}'_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1 &&= (0,-1,1), \\ \boldsymbol{a}'_4 &= \boldsymbol{a}_4 &&= (0,1,-1), \\ \boldsymbol{a}'_5 &= \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{a}_1 &&= (0,2,-2), \end{aligned}$$

y así: rango $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5) = 1 +$ rango $(\boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3, \boldsymbol{a}'_4, \boldsymbol{a}'_5)$. Si ahora hacemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}''_3 &= \boldsymbol{a}'_3 - \boldsymbol{a}'_2 = (0,0,0), \\ \boldsymbol{a}''_4 &= \boldsymbol{a}'_4 + \boldsymbol{a}'_2 = (0,0,0), \\ \boldsymbol{a}''_5 &= \boldsymbol{a}'_5 + 2\boldsymbol{a}'_2 = (0,0,0), \end{aligned}$$

entonces: rango $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5) = 1 + 1 +$ rango $(\boldsymbol{a}''_3, \boldsymbol{a}''_4, \boldsymbol{a}''_5) = 2 + 0 = 2$. En conclusión: rango $A = 2$.

EJEMPLO 28 Calculemos, según los valores de α, el rango de la matriz con términos en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene: rango A = rango $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, donde $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ y $\boldsymbol{a}_4$ son los vectores columna de A (los cuatro son de $\mathbb{R}^3$):

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,2,0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,\alpha,1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0,1,1) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_4 = (1,-1,-3).$$

Si hacemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_2' &= \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = (0, \alpha - 2, 1), \\ \boldsymbol{a}_3' &= \boldsymbol{a}_3 \qquad\;\; = (0,1,1), \\ \boldsymbol{a}_4' &= \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_1 = (0,-3,-3), \end{aligned}$$

entonces: rango $A = 1 +$ rango $(\boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3', \boldsymbol{a}_4')$. Si ahora hacemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_2'' &= \boldsymbol{a}_2' - (2-\alpha)\boldsymbol{a}_3' = (0,0,(2-\alpha)+1), \\ \boldsymbol{a}_4'' &= \boldsymbol{a}_4' + \qquad 3\boldsymbol{a}_3' = (0,0,0), \end{aligned}$$

entonces: rango $A = 1 + 1 +$ rango $(\boldsymbol{a}_2'', \boldsymbol{a}_4'') = 2 +$ rango$((0,0,3-\alpha))$. En conclusión:

$$\operatorname{rango} A = \begin{cases} 2, & \text{si } \alpha = 3, \\ 3, & \text{si } \alpha \neq 3. \end{cases}$$

Consecuencias de la definición de rango Se verifica:

- *El rango de una matriz es menor o igual que el número de sus filas y que el número de sus columnas.*
  Una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$ tiene m vectores columna, y el rango de m vectores es menor o igual que m; los vectores columna son vectores de $\mathbb{K}^n$, y el rango de un sistema de vectores de $\mathbb{K}^n$ es menor o igual que n.
- *No se modifica el rango de una matriz permutando entre sí sus columnas.*
  Se deduce inmediatamente de una de las consecuencias de la definición de rango de un sistema de vectores: no se modifica el rango de un sistema de vectores permutando entre sí dos de ellos.

2. Relación entre el rango de una matriz y el de una aplicación lineal representada por ella Consideremos una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

y sea f la aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ asociada a A en las bases (fijadas):

$$V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m) \quad \text{y} \quad W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n);$$

gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{K}^n \\ v_j & \dashrightarrow & f(v_j). \end{array}$$

El vector $f(v_j)$ es, pues, el vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas en la base W son los términos de la matriz columna j-ésima de A:

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Consideremos el automorfismo Ψ de $\mathbb{K}^n$ tal que:

$$\Psi(w_i) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

(cf. sección 5 del capítulo II, p. 132) donde $B_C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \Psi(f(v_j)) &= \Psi(a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n) \\ &= a_{1j}\Psi(w_1) + a_{2j}\Psi(w_2) + \cdots + a_{nj}\Psi(w_n) \\ &= a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n \\ &= (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}), \end{aligned}$$

y $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = a_j$ es el j-ésimo vector columna de A. Es decir, se tiene:

$$\Psi(f(v_j)) = a_j, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{16}$$

Por otra parte, por definición de rango de una aplicación lineal y por ser Ψ isomorfismo se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango} f &= \operatorname{rango}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)) \\ &= \operatorname{rango}(\Psi(f(v_1)), \Psi(f(v_2)), \dots \Psi(f(v_m))), \end{aligned}$$

de lo que se deduce (teniendo en cuenta (16)):

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \operatorname{rango} A,$$

pues rango $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ es por definición el rango de la matriz A.

Hemos probado, pues, el siguiente resultado:

El rango de una aplicación lineal es igual al de cualquier matriz que la represente

Proposición III.8 *Si f es la aplicación lineal representada por una matriz A en dos bases dadas, entonces:*

$$\operatorname{rango} f = \operatorname{rango} A.$$

Nota bene Es indiferente la elección de las bases; es decir, si A es una matriz, entonces todas las aplicaciones lineales que pueden ser representadas por A tienen el mismo rango. ▲

Consecuencias de la proposición III.8 Se verifica:

- *Si A y B son dos matrices tales que existe el producto AB, entonces:*

$$\operatorname{rango}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rango} A, \operatorname{rango} B\}.$$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son las aplicaciones lineales canónicamente asociadas a las matrices A y B entonces la aplicación lineal canónicamente asociada a AB es $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, y de acuerdo con la proposición III.8 (y recordando la proposición II.6 (cf. p. 121)), se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) &\leqslant \min\{\operatorname{rango} \mathcal{A}, \operatorname{rango} \mathcal{B}\}\\ &= \min\{\operatorname{rango} A, \operatorname{rango} B\}.\end{aligned}$$

- *Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada de orden n represente un isomorfismo es que el rango de la matriz sea igual a n.*

Es una consecuencia inmediata del hecho de que una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$ es un isomorfismo precisamente si su rango es igual a n (cf. proposición II.13, p. 135).

Proposición III.9 *Si A es una matriz cuadrada de orden n de rango igual a n, y B es una matriz de orden (n, m) (ambas matrices con términos en $\mathbb{K}$), entonces:*

$$\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango} B.$$

Demostración Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las aplicaciones lineales canónicamente asociadas a A y B y sea $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m)$ la base canónica de $\mathbb{K}^m$. Como $\operatorname{rango} A = n$, la aplicación $\mathcal{A}$ es un isomorfismo (cf. última consecuencia de la proposición III.8), y por tanto:

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(AB) &= \operatorname{rango}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\\ &= \operatorname{rango}([\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_1), [\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_2), \dots, [\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_m))\\ &= \operatorname{rango}(\mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1)), \mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2)), \dots, \mathcal{A}(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_m)))\\ &= \operatorname{rango}(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \dots, \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_m))\\ &= \operatorname{rango} \mathcal{B} = \operatorname{rango} B,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el corolario de la proposición II.8 (cf. p. 124). $\square$

III.6 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE UNA MATRIZ

1. Transformaciones elementales Llamaremos **transformaciones elementales** (por filas) a cualquiera de los tres tipos de transformaciones siguientes (que se aplican sobre matrices con términos en un cuerpo $\mathbb{K}$):

- Tipo I: *permutar entre sí las filas i-ésima y j-ésima.* Es decir, intercambiamos las filas i-ésima y j-ésima, y las demás filas las dejamos en la misma posición.

EJEMPLO 29 Al *permutar entre sí las filas primera y segunda* de la matriz real:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos esta transformación de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Tipo II: *multiplicar la fila i-ésima por un escalar no nulo.* Esto es, los términos de la fila i-ésima se multiplican por el escalar no nulo, y los términos de las demás filas quedan inalterados.

EJEMPLO 30 Al *multiplicar por* $1/2$ *la segunda fila* de la matriz real:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos esta transformación de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to 1/2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Tipo III: *sumar a la fila i-ésima el resultado de multiplicar por un escalar la fila j-ésima, con $j \neq i$.* Es decir, se sustituye la fila i-ésima por la suma —término a término— de ella y el resultado de multiplicar la fila j-ésima por el escalar, y las restantes filas, incluida la j-ésima, quedan inalteradas.

EJEMPLO 31 *Sumar a la segunda fila la tercera multiplicada por el escalar* -2 en la matriz real:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

da como resultado la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos esta transformación de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2+(-2)F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Matrices elementales Denominaremos **matriz elemental** de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ **asociada** a una transformación elemental a la matriz resultante de aplicar la transformación elemental a la matriz identidad I_n.

Se tienen, pues, tres tipos de matrices elementales:

- Tipo I:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} & & & i & & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & \cdots & & 0 & \cdots & & 1 & & \cdots & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & \cdots & & 1 & \cdots & & 0 & & \cdots & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
= \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_j \\ \hline \vdots \\ \hline L_i \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix},$$

que consiste en *permutar entre sí las filas i-ésima y j-ésima* de la matriz identidad I_n (obsérvese que estamos utilizando notación por filas, y recordemos que $L_1, L_2, \ldots, L_n$ son las matrices fila de I_n).

EJEMPLO 32 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3 \\ \hline L_2 \\ \hline L_1 \end{pmatrix}$$

es una matriz elemental de orden 3, que se ha obtenido permutando entre sí las filas primera y tercera de la matriz identidad I_3.

La matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_3 \\ \hline L_2 \\ \hline L_4 \end{pmatrix}$$

es una matriz elemental de orden 4, que se ha obtenido permutando entre sí las filas segunda y tercera de la matriz identidad I_4.

- Tipo II:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \cdots & & \alpha & & \cdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha L_i \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

que consiste en *multiplicar por el escalar no nulo α la fila i-ésima* de la matriz identidad I_n.

EJEMPLO 33 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline 3L_3 \end{pmatrix}$$

es una matriz elemental de orden 3, que se ha obtenido multiplicando la tercera fila de la matriz identidad I_3 por el escalar no nulo 3.

- Tipo III:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & \vdots & & \\
 & \dots & 1 & \dots & \beta & \dots & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
=
\begin{pmatrix}
L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_i + \beta L_j \\ \hline \vdots \\ \hline L_n
\end{pmatrix}, \quad i \neq j,
$$

que consiste en *sustituir*, en la matriz identidad I_n, *la fila i-ésima por la suma de ella misma y el resultado de multiplicar la fila j-ésima por el escalar β.*

EJEMPLO 34 Con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matriz:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -2 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
L_1 - 2L_3 \\ \hline L_2 \\ \hline L_3
\end{pmatrix}
$$

es una matriz elemental de orden 3, que se ha obtenido sustituyendo la primera fila de I_3 por la suma de ella misma y el resultado de multiplicar la tercera por -2.

La matriz:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
L_1 \\ \hline L_2 + 4L_1 \\ \hline L_3 \\ \hline L_4
\end{pmatrix}
$$

es una matriz elemental de orden 4, que se ha obtenido sustituyendo la segunda fila de I_4 por la suma de ella misma y el resultado de multiplicar la primera por 4.

---

3. Propiedades de las transformaciones elementales y de las matrices elementales Empezamos viendo una propiedad sobre el rango de las matrices elementales:

Una matriz elemental es de rango máximo

Proposición III.10 *El rango de una matriz elemental de orden n es igual a n.*

Demostración La matriz elemental de tipo I obtenida permutando entre sí las filas i-ésima y j-ésima de I_n verifica que sus n vectores columna son:

$$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_j, \dots, \boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{e}_n,$$

de rango igual al de los vectores (cf. propiedades del rango de un sistema de vectores, p. 80):

$$e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_n,$$

que es igual a n.

La matriz elemental de tipo II obtenida multiplicando la fila i-ésima de I_n por el escalar no nulo α verifica que el sistema de sus vectores columna es $(e_1, \dots, \alpha e_i, \dots, e_n)$, cuyo rango es igual a n (cf. propiedades del rango de un sistema de vectores, p. 80).

Finalmente, los n vectores columna de la matriz elemental de tipo III obtenida de la forma: sustituyendo la fila i-ésima por la suma de ella misma y la fila j-ésima multiplicada por el escalar β, son: $e_1, \dots, e_{j-1}, e_j + \beta e_i, e_{j+1}, \dots, e_n$, cuyo rango (cf. proposición I.18, p. 82) es igual al de los vectores $e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n$, y por tanto igual a n. c.q.d.

Efectuar una transformación elemental es como multiplicar (por la izda.) por su matriz elemental

Proposición III.11 *Si llevamos a cabo una transformación elemental en una matriz de orden (n, m), el resultado es el mismo que el de multiplicar por la izquierda la matriz dada por la matriz elemental de orden n asociada a la transformación.*

Veamos en un ejemplo lo que luego demostraremos en el caso general.

Consideremos la transformación elemental: *sumar a la primera fila el resultado de multiplicar por -2 la tercera*, es decir: "$F_1 \leftarrow F_1 + (-2)F_3$". Aplicada a la matriz real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y la matriz elemental asociada a la transformación es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por un lado, se verifica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz elemental}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz dada}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz producto}},$$

y por otro lado:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz dada}} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + (-2)F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matriz transformada}},$$

y las matrices transformada y producto son la misma. Es decir, se obtiene el mism resultado aplicando la transformación elemental a la matriz que multiplicándola p la izquierda por la matriz elemental asociada a la transformación.

Demostración de la proposición III.11 Sea A una matriz de orden (n, m); en notaci por filas:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix}.$$

Recordemos, del ejercicio 5 (cf. p. 203), que el producto de la i-ésima matriz fila de la matriz identidad I_n por la matriz A es igual a la i-ésima matriz fila de A, es decir: $L_i A = F$ En lo que sigue también haremos uso de la proposición III.6 (cf. p. 198).

Consideremos la matriz elemental de tipo I asociada a la transformación elemental: *pe mutar entre sí las filas i-ésima y j-ésima*. El producto de esta matriz elemental por A es:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_j \\ \hline \vdots \\ \hline L_i \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} L_1 A \\ \hline \vdots \\ \hline L_j A \\ \hline \vdots \\ \hline L_i A \\ \hline \vdots \\ \hline L_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline \vdots \\ \hline F_j \\ \hline \vdots \\ \hline F_i \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix},$$

que es resultado de llevar a cabo en la matriz A la transformación elemental *permutar entr sí las filas i-ésima y j-ésima*.

Consideremos ahora la matriz elemental de tipo II asociada a la transformación elemental *multiplicar la fila i-ésima por el escalar no nulo α*. Su producto por la matriz A es:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha L_i \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} L_1 A \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha L_i A \\ \hline \vdots \\ \hline L_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha F_i \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix},$$

que es resultado de aplicar a la matriz A la transformación elemental *multiplicar la fila i-ésim por el escalar no nulo α*.

Finalmente, consideremos la matriz elemental de tipo III asociada a la transformación elemental: *sumar a la fila i-ésima el resultado de multiplicar la fila j-ésima por el escalar β*. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_i - \beta L_j \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} L_1 A \\ \hline \vdots \\ \hline (L_i + \beta L_j)A \\ \hline \vdots \\ \hline L_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 A \\ \hline \vdots \\ \hline L_i A + \beta L_j A \\ \hline \vdots \\ \hline L_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline \vdots \\ \hline F_i + \beta F_j \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix},$$

que es resultado de aplicar a la matriz A la transformación elemental *sumar a la fila i-ésima el resultado de multiplicar la fila j-ésima por el escalar β*.

Recapitulando, hemos probado que aplicar a una matriz de orden (n, m) una transformación elemental tiene el mismo resultado que multiplicar por la izquierda la matriz por la matriz elemental de orden n asociada a la transformación elemental. C.Q.D.

El rango no varía al efectuar una transformación elemental

Corolario *Las transformaciones elementales conservan el rango, es decir, al aplicar una transformación elemental a una matriz, el resultado es una matriz cuyo rango es el mismo que el de la matriz original.*

Demostración En la proposición anterior acabamos de ver que aplicar una transformación elemental a una matriz tiene el mismo resultado que multiplicarla por la izquierda por la matriz elemental correspondiente. Dado que las matrices elementales son cuadradas y su rango es igual a su orden (cf. proposición III.10, p. 216), con la proposición III.9 (cf. p. 212) concluimos el resultado. C.Q.D.

EJEMPLO 35 Consideremos la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y la transformación elemental *permutar entre sí las filas primera y segunda*: "$F_1 \leftrightarrow F_2$".

Calculemos en primer lugar la matriz elemental M_1 asociada a la transformación elemental considerada. Aplicando ésta a la matriz identidad I_3, se tiene:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1.$$

Multiplicando por la izquierda la matriz A por la matriz elemental M_1, se obtiene:

$$M_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A_1.$$

La matriz A_1 es el resultado de aplicar a la matriz A la transformación elemental "$F_1 \leftrightarrow F_2$":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A_1.$$

Consideremos ahora la transformación elemental *multiplicar la segunda fila por* 2, es decir: "$F_2 \leftarrow 2F_2$". Su matriz elemental asociada es:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el producto M_2A_1 es:

$$M_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A_2,$$

que es la matriz obtenida aplicando la transformación a la matriz A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A_2.$$

Obsérvese que se verifica: $A_2 = M_2A_1$ y $A_1 = M_1A$, y por tanto: $A_2 = M_2M_1A$. Entonces la matriz A_2, que es igual al resultado de aplicar sucesivamente las transformaciones elementales "$F_1 \leftrightarrow F_2$" y "$F_2 \leftarrow 2F_2$" a la matriz A, también es igual al producto por la izquierda de A por la matriz M_2M_1.

El lector puede comprobar fácilmente que el rango de la matriz A es igual a 2; del corolario anterior se deduce: rango A_2 = rango A_1 = rango A = 2.

Antes de ver la siguiente propiedad de las transformaciones elementales, estudiemos un ejemplo. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

que es de orden $(4, 5)$, su rango es 3 y sus tres primeros vectores columna: $(0, 2, 4, 0)$ $(1, 0, 1, 1)$ y $(1, 2, 4, 1)$, son linealmente independientes. Nuestro objetivo es aplicar sucesivas transformaciones elementales a la matriz A que nos lleven a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}, \qquad (17$$

la cual verifica que sus 3 primeros vectores columna son $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ (de la base canónica de $\mathbb{R}^4$).

En primer lugar, tratamos de conseguir una matriz cuyo primer vector columna sea $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$. El primer paso consiste en colocar en la posición $(1,1)$ un término no nulo, y lo logramos aplicando a la matriz A la transformación elemental *permutar entre sí las filas primera y segunda* ("$F_1 \leftrightarrow F_2$"):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente paso es hacer igual a 1 el término de la posición $(1,1)$; se consigue con la transformación elemental *multiplicar por* $1/2$ *la primera fila* ("$F_1 \leftarrow (1/2)F_1$"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación, debemos conseguir que el término de la posición $(3,1)$ sea igual a 0, a lo que se llega llevando a cabo la transformación elemental *sustituir la tercera fila por la suma de ella misma y el resultado de multiplicar por* -4 *la primera* (es decir: "$F_3 \leftarrow F_3 + (-4)F_1$"):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

y ya tenemos una matriz cuyo primer vector columna es $(1,0,0,0)$. Obsérvese que el rango de esta matriz también es igual a 3, pues es el resultado de sucesivas transformaciones elementales aplicadas a A, las cuales conservan el rango (cf. corolario de la proposición III.11 (cf. p. 217)).

En segundo lugar, tratamos de llegar a una matriz cuyos vectores columna primero y segundo sean $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)$, respectivamente. Para ello, sólo nos falta que los términos $(3,2)$ y $(4,2)$ sean nulos. Aplicamos a la matriz de (18), sucesivamente, las transformaciones elementales siguientes: *sustituir la tercera fila por la suma de ella y el resultado de multiplicar por* -1 *la segunda fila*, y *sustituir la cuarta fila por la suma de ella y el resultado de multiplicar por* -1 *la segunda fila*. Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos vectores columna primero y segundo son $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$, respectivamente. Esta mat
es de rango 3.

Finalmente, queremos que el tercer vector columna sea $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)$, pero
modificar las dos primeras columnas. Primero, *multiplicamos la tercera fila por −*
("$F_3 \leftarrow -F_3$"), con el fin de conseguir un 1 en la posición $(3,3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para conseguir que los términos de las posiciones $(2,3)$ y $(1,3)$ sean nu
sustituimos la segunda fila por ella más la tercera multiplicada por -1, y *sustitum*
la primera fila por ella más la tercera multiplicada por -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos aplicado, pues, a la matriz A sucesivas transformaciones elementale
hemos llegado a una matriz de la forma (17).

El procedimiento que hemos llevado a cabo con la matriz A puede generalizar
como nos muestra la siguiente proposición.

Qué tipo de matriz es posible obtener aplicando transformaciones elementales sucesivas a una matriz

Proposición III.12 *Dada una matriz de orden (n,m), de rango $r \geqslant 1$ y sus r primeros vectores columna linealmente independientes, es posible obten una matriz de la forma:*

$$\begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-r \end{matrix} \\ \quad\underbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r}\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)} \quad \dots \quad a'_{1m}}}_{m-r} \end{array} \tag{19}$$

aplicando a la matriz dada transformaciones elementales sucesivas.

Nota Obsérvese cómo es la matriz de (19): sus r primeros vectores columna son $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r$ (de la base canónica de $\mathbb{K}^n$), y sus $(n-r)$ últimas filas tienen todos sus térm nulos. ▲

Demostración Sea A una matriz de orden (n,m), de rango $r \geqslant 1$ y con sus r primeros vectores columna linealmente independientes. Probaremos por inducción que es posible, mediante aplicación de transformaciones elementales sucesivas a la matriz A, obtener una matriz de la forma (19).

En primer lugar, veamos cómo podemos llegar a una matriz cuyo primer vector columna sea: $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{K}^n$. No todos los términos de la primera columna de la matriz A son nulos (si así fuera, los r primeros vectores columna de A no serían linealmente independientes), y por tanto, mediante una transformación elemental de tipo I, consistente en una permutación de filas, podemos conseguir una matriz cuyo término de la posición $(1,1)$ es no nulo. Con una transformación elemental de tipo II: multiplicar la primera fila por el inverso del término $(1,1)$, obtenemos una matriz con el término $(1,1)$ igual a 1. Mediante transformaciones elementales de tipo III, conseguimos que los restantes términos de la primera columna sean nulos.

Supongamos que, mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a la matriz A, hemos llegado a una matriz A' cuyos $i-1$ primeros vectores columna $(1 < i \leqslant r)$ son los vectores $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}$ de $\mathbb{K}^n$. Probemos que mediante transformaciones de A' podemos obtener una matriz cuyos i primeros vectores columna son: $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_i$.

Observamos lo siguiente:

- Puesto que A' se ha obtenido de A a través de transformaciones elementales sucesivas, el rango de A' también es igual a r, y al igual que en A, los r primeros vectores columna de A' son linealmente independientes (cf. corolario de la proposición III.11 (cf. p. 217)).
- Las $i-1$ primeras matrices columna de A' son:

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A'_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(el término 1 de A'_{i-1} es el de posición $(i-1,1)$), y si la i-ésima matriz columna de A' es:

$$A'_i = \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ \vdots \\ a'_{(i-1)i} \\ a'_{ii} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{pmatrix},$$

entonces no son simultáneamente nulos los términos $a'_{ii}, \ldots, a'_{ni}$, pues si lo fueran, se tendría: $A'_i = a'_{1i}A'_1 + \cdots + a'_{(i-1)i}A'_{i-1}$, y los r primeros vectores columna de A' no serían linealmente independientes.

De esta forma, permutando entre sí la fila i-ésima y alguna de las filas de la i-ésima a la n-ésima, llegamos a una matriz con el término (i, i) no nulo, y multiplicando por el invers de este término la fila i-ésima conseguimos 1 en esa posición. Transformaciones de tipo II permiten, finalmente, conseguir una matriz con los restantes términos de la columna i-ésim iguales a 0, y por tanto con su i-ésimo vector columna igual a $\boldsymbol{e}_i$.

En el último paso —cuando $i = r$— llegamos a una matriz cuyos vectores columna sor $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{r-1}, \boldsymbol{e}_r$. La matriz obtenida en este último paso también tiene rango r, y com sus r primeros vectores columna: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$, son linealmente independientes, los $(m -$ restantes vectores columna serán combinación lineal de ellos, y por tanto, al igual que l vectores $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$, tendrán nulas sus $(n - r)$ últimas componentes.

En definitiva, hemos llegado, aplicando a la matriz A sucesivas transformaciones elemen tales, a una matriz de la forma (19).

Corolario *Si A es una matriz de orden (n, m), de rango $r \geqslant 1$ y con sus r primeros vectores columna linealmente independientes, entonces existe una matriz T cuadrada de orden n y de rango igual a n, tal que el producto TA es una matriz de la forma (19).*

Demostración De acuerdo con la proposición anterior, existen transformaciones elemen tales que aplicadas sucesivamente a la matriz A permiten obtener una matriz A' de la for ma (19). Si hemos aplicado k transformaciones elementales, y $M_1, M_2, \ldots, M_k$ son las matrices elementales asociadas, respectivamente, a las transformaciones elementales sucesivamen aplicadas, de acuerdo con la proposición III.11 (cf. p. 217), se tendrá:

$$A' = M_k \cdots M_2 M_1 A.$$

La matriz $T = M_k \cdots M_2 M_1$ es cuadrada de orden n y su rango es igual a n (por ser product de matrices elementales de orden n, que tienen rango igual a n), y verifica: $TA = A'$.

EJEMPLO 36 Consideremos la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es igual a 2, y sus dos primeros vectores columna son linealmente inde pendientes. De acuerdo con la proposición III.12 (cf. p. 222), podemos aplicar a la matriz transformaciones elementales sucesivas y obtener una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2$$

la cual verifica que sus dos primeros vectores columna son $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, y también qu su última fila tiene todos sus términos nulos:

$$(\text{número de filas de } A) - (\text{rango} A) = 3 - 2 = 1.$$

Se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3.$$

La matriz A_1, obtenida a partir de la matriz A mediante la transformación elemental (de tipo I) "$F_1 \leftrightarrow F_2$", se puede obtener también multiplicando por la izquierda A por la matriz elemental asociada a la transformación (cf. proposición III.11, p. 217); es decir:

$$A_1 = M_1 A, \quad \text{con } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, la matriz A_2 puede obtenerse de A_1 multiplicando por la izquierda ésta por la matriz elemental asociada a la transformación elemental "$F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$":

$$A_2 = M_2 A_1, \quad \text{con } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz A_3 puede obtenerse de A_2 a través del producto:

$$A_3 = M_3 A_2, \quad \text{con } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que M_3 es la matriz elemental asociada a la transformación "$F_1 \leftarrow F_1 - F_2$".

De las observaciones anteriores se deduce: $A_3 = M_3 A_2 = M_3 M_2 A_1 = M_3 M_2 M_1 A$, y por tanto la matriz $T = M_3 M_2 M_1$ verifica que el producto TA es una matriz de la forma (20) (recuérdese el corolario de la proposición III.12 (cf. p. 222)).

Efectuando el producto $M_3 M_2 M_1$, se puede obtener la matriz T:

$$T = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, es posible calcular la matriz T de una forma más sencilla, basándonos en la siguiente observación. Se verifica:

$$T = TI_3 = M_3 M_2 M_1 I_3,$$

es decir: puede interpretarse la matriz T como el resultado de aplicar a la matriz identidad I las mismas transformaciones elementales que hemos aplicado a la matriz A (cf. proposición III.11, p. 217). Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

y la última matriz es la matriz T.

III.7 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

1. Definición de matriz inversa A continuación, vemos la definición de matriz inversa de una matriz cuadrada:

Definición

Inversa de una matriz cuadrada

Sea A una matriz con términos en $\mathbb{K}$, cuadrada de orden n. De una matriz B con términos en $\mathbb{K}$, también cuadrada de orden n, diremos es **matriz inversa** de A si se verifica:

$$AB = BA = I_n.$$

Matriz invertible

De una matriz cuadrada que tiene matriz inversa diremos es **invertible.**

Si la matriz A tiene matriz inversa, entonces ésta es única. En efecto, si B y C son matrices inversas de A, por definición se tiene:

$$BA = I_n = CA,$$

y multiplicando por la derecha por la matriz B en ambos miembros de la igualdad $BA = CA$, resulta:

$$BAB = CAB,$$

y como $AB = I_n$, se deduce que $B = C$. Por tanto, una matriz invertible tiene una única matriz inversa.

Si la matriz A es invertible, su (única) matriz inversa se denotará por A^{-1}:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \tag{21}$$

Nota bene De las definiciones y de (21) se deduce que si la matriz A es invertible, también lo es A^{-1}, y su inversa es A:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

▲

EJEMPLO 37 Dada la matriz real cuadrada de orden 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que su matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 38 La matriz identidad de orden n con términos en $\mathbb{K}$: I_n, es invertible, y su matriz inversa es ella misma, pues $I_n I_n = I_n$. Esto es:

$$I_n^{-1} = I_n.$$

EJERCICIO 8 *Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Demostrar que si A y B son invertibles, también es invertible el producto AB, y se verifica: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.* ▲

CNS de matriz invertible (tener rango máximo)

Proposición III.13 *Una matriz cuadrada de orden n es invertible si y sólo si su rango es igual a n.*

Demostración Sea A una matriz cuadrada de orden n. Que la matriz A es invertible significa existe una matriz cuadrada B de orden n tal que:

$$AB = BA = I_n. \tag{22}$$

Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}_n$ son las aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$ canónicamente asociadas a las matrices A, B y I_n, respectivamente, entonces (cf. corolario de la proposición III.7 (cf. p. 201)) la igualdad (22) es equivalente a:

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}_n, \tag{23}$$

y como $\mathcal{I}_n$ es la aplicación identidad de $\mathbb{K}^n$, afirmar (23) es lo mismo que afirmar que $\mathcal{A}$ es biyectiva (cf. teorema 3, p. 400).

Por tanto, la matriz A es invertible precisamente si la aplicación lineal $\mathcal{A}$ es un isomorfismo, lo que a su vez equivale (cf. segunda consecuencia de la proposición III.8 (cf. p. 211)) a: rango $A = n$. C.Q.D.

Nota bene En la demostración de la proposición se ha obtenido que una matriz A es invertible precisamente si su aplicación lineal canónicamente asociada: $\mathcal{A}$, es biyectiva.

▲

EJEMPLO 39 La matriz real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3 y tiene rango 3, y por tanto es invertible.

La matriz real cuadrada de orden 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no es invertible, pues tiene rango 1.

EJERCICIO 9 *Consideremos una matriz cuadrada A, y sea A su aplicación lineal canónicamente asociad. Demostrar que si A es invertible, entonces la aplicación lineal canónicamente asociada a matriz A^{-1} es A^{-1}.* ▲

2. Método práctico para el cálculo de la matriz inversa A continuació exponemos un método para el cálculo de la inversa de una matriz invertible basad en transformaciones elementales.

Consideremos una matriz A cuadrada de orden n con términos en $\mathbb{K}$ e invertibl- es decir (cf. proposición III.13, p. 227): rango $A = n$. De aplicar la proposición III.1 (cf. p. 222) (cf. p. 222) a la matriz A se deduce que es posible obtener una matriz de la forma:

$$A' = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-r \end{matrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m-r}\qquad \end{array}$$

llevando a cabo en la matriz A transformaciones elementales sucesivas, siendo r rango de A, n el número de sus filas y m el de sus columnas; como en nuestro ca se tiene: $r = m = n$, la matriz A' toma la forma:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n .$$

Es decir: mediante transformaciones elementales sucesivas aplicadas a la matriz i vertible A es posible obtener la matriz identidad I_n.

Si $M_1, M_2, \ldots, M_k$ son las matrices elementales asociadas a las k sucesivas transformaciones elementales que aplicadas a A nos permiten obtener I_n, entonces (cf. demostración del corolario de la proposición 3 (cf. p. 224)):

$$M_k \cdots M_2 M_1 A = I_n,$$

de donde, multiplicando por la derecha por la matriz A^{-1}, se obtiene:

$$M_k \cdots M_2 M_1 A A^{-1} = I_n A^{-1}, \qquad \text{o bien:} \quad M_k \cdots M_2 M_1 I_n = A^{-1},$$

y esta igualdad puede interpretarse de la forma siguiente (cf. proposición III.11, p. 217): la matriz A^{-1} es el resultado de aplicar a I_n las mismas transformaciones elementales sucesivas que hemos aplicado a A para obtener I_n.

EJEMPLO 40 La matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

considerada en el ejemplo 39 (cf. p. 228), es invertible. Calculemos su matriz inversa: A^{-1}.

Aplicamos a la matriz A transformaciones elementales sucesivas hasta obtener la matriz identidad I_3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

A continuación, aplicamos las mismas transformaciones elementales, y en el mismo orden, a la matriz I_3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y esta última matriz es la inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A modo de comprobación, el lector puede verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

III.8 TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

1. Definición de matriz traspuesta A continuación, vemos la definición de matriz traspuesta de una matriz:

Traspuesta de una matriz

> **Definición**
>
> Sea A una matriz de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$. Definimos la **matriz traspuesta** de la matriz A, que se denota: A^t, como la matriz de orden (m, n) tal que su término de posición (i, j), que denotaremos: a^t_{ij}, es el término de posición (j, i) de la matriz A:
>
> $$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

En otras palabras, los n vectores columna de A^t son los n vectores fila de A, y los m vectores fila de A^t son los m vectores columna de A.

EJEMPLO 41 Sea A la matriz con términos reales de orden $(2, 3)$ cuyos tres vectores columna son:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}_3 = (3, 0).$$

Escribamos la matriz traspuesta de A: A^t.

Los tres vectores fila de A^t son por definición: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$, luego:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora, a partir de A^t, el término de posición $(2, 3)$ de la matriz A. De la definición de matriz traspuesta se deduce que el término de posición $(2, 3)$ de la matriz A es el término $(3, 2)$ de la matriz A^t, es decir: 0.

EJEMPLO 42 La traspuesta de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

es la matriz:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Consecuencias de la definición de traspuesta de una matriz Se verifica:

- *La traspuesta de la matriz identidad I_n es ella misma: $I_n^t = I_n$.*
- *La traspuesta de la matriz A^t, que denotaremos: $(A^t)^t$, es igual a A.*
  La traspuesta de la matriz A^t es: $(A^t)^t = \left(a_{ij}^{tt};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right)$. Pero se tiene que $a_{ij}^{tt} = a_{ji}^t = a_{ij}$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y cada $1 \leqslant j \leqslant m$, luego: $(A^t)^t = A$.
- *La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas: $(A+B)^t = A^t + B^t$.*
  Si ponemos: $C = A + B$, entonces:
  $$c_{ij}^t = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a_{ij}^t + b_{ij}^t, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$
  y por tanto: $C^t = A^t + B^t$.
- *Si α es un escalar, entonces la traspuesta de la matriz αA es igual a αA^t: $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.*
  Poniendo: $D = \alpha A$, se tiene:
  $$d_{ij}^t = d_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha a_{ij}^t, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$
  y por tanto: $D^t = \alpha A^t$.
- *La traspuesta del producto BA es igual a A^tB^t:* $(BA)^t = A^tB^t$.
  Pongamos: $E = BA$. Se tiene:
  $$e_{ij}^t = e_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^t b_{kj}^t.$$
  Nota bene Si A es de orden (n, m), para que se pueda formar el producto BA es condición *sine qua non* que B sea de orden (p, n), con lo que el producto BA será de orden (p, m). Análogamente, como A^t es de orden (m, n), B^t es de orden (n, p), y A^tB^t de orden (m, p). ▲
- *Si la matriz A es cuadrada de orden n y es invertible, entonces también la matriz A^t es invertible, y su inversa es $(A^{-1})^t$:* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
  Se tiene (consecuencias anteriores):
  $$A^t\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}A\right)^t = I_n^t = I_n \quad \text{y} \quad \left(A^{-1}\right)^t A^t = \left(AA^{-1}\right)^t = I_n^t = I_n,$$
  y por tanto A^t es invertible y su inversa es $(A^{-1})^t$.

EJEMPLO 43 Sean las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobemos se verifica: $(A+B)^t = A^t + B^t$ y $(CA)^t = A^tC^t$.

Se tiene:

$$A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{t} + B^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (A + B)^{t}.$$

Por otro lado, se tiene: $C^{t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y por tanto:

$$C^{t}A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y como:

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

resulta:

$$(AC)^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = C^{t}A^{t}.$$

La trasposición de matrices conserva el rango, en el sentido siguiente:

El rango de una matriz es igual al de su traspuesta

Proposición III.14 *El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.*

Demostración Sea A una matriz de orden (n, m) y rango $r \geqslant 1$. Como el rango de una matriz es indiferente al orden de sus vectores columna, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los r primeros vectores columna de A son linealmente independientes. Sabemos (cf. corolario de la proposición 3 (cf. p. 224)) que existe una matriz T cuadrada de orden n tal que TA es de la forma:

$$TA = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\} n-r \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m-r} \end{array}.$$

Los vectores columna no nulos de la traspuesta de la matriz TA son:

$$(1, 0, \dots, 0, a'_{1(r+1)}, \dots, a'_{1m}),\ (0, 1, \dots, 0, a'_{2(r+1)}, \dots, a'_{2m}),\ \dots,\ (0, 0, \dots, 1, a'_{r(r+1)}, \dots, a'_{rm}).$$

cuyo rango es, obviamente, r, y por tanto:

$$\operatorname{rango} A = r = \operatorname{rango}(TA)^t = \operatorname{rango}(A^t T^t) \leqslant \text{mín}\{\operatorname{rango} A^t, \operatorname{rango} T^t\} \leqslant \operatorname{rango} A^t,$$

de lo que se deduce:

$$\operatorname{rango} A \leqslant \operatorname{rango} A^t. \tag{24}$$

Es decir, el rango de una matriz es menor o igual que el de su traspuesta. Aplicando esta afirmación a la propia matriz A^t, resulta:

$$\operatorname{rango} A^t \leqslant \operatorname{rango} (A^t)^t = \operatorname{rango} A, \tag{25}$$

y finalmente de (24) y (25) se concluye: $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A^t$. C.Q.D.

III.9 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 188) Sea $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Buscaremos condiciones sobre una base $B' = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ para que la matriz asociada a f en las bases B y B' sea la matriz identidad I_2.

Por definición de matriz asociada, las coordenadas de $f(\boldsymbol{v}_1)$ en la base B' tienen que ser: 1 y 0, es decir:

$$f(\boldsymbol{v}_1) = 1\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1.$$

Análogamente, las coordenadas de $f(\boldsymbol{v}_2)$ en B' tienen que ser: 0 y 1, esto es:

$$f(\boldsymbol{v}_2) = 0\boldsymbol{w}_1 + 1\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2.$$

En consecuencia, los vectores $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ han de ser: $\boldsymbol{w}_1 = f(\boldsymbol{v}_1)$ y $\boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_2)$.

Por ejemplo, tomando la base $B = ((1,1),(1,2))$, se tiene que: $f(1,1) = (1,2)$ y $f(1,2) = (1,3)$, y el sistema de vectores $B' = ((1,2),(1,3))$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y la matriz asociada a f en las bases B y B' es la matriz identidad I_2.

Obsérvese que la aplicación lineal f es distinta de la aplicación identidad de $\mathbb{R}^2$. Esto no contradice lo enunciado en la proposición III.1 (cf. p. 187): en la proposición se requería que las bases fueran iguales, pero, en este ejercicio, B' no es igual a B.

Ejercicio 2 (p. 196) Sea (n,m) el orden de A, y sea (p,q) el orden de B.

Al estar definido el producto de A por B, el número de columnas de A es igual al número de filas de B: $m = p$. De estar definido el producto de B por A, se tiene: $n = q$. Es decir, si A es de orden (n,m), entonces el orden de B es: $(p,q) = (m,n)$. El orden de la matriz AB es, pues, (n,n), y el de la matriz BA es (m,m). De ser ambos órdenes iguales, se deduce: $n = m$, y por tanto A y B son matrices cuadradas del mismo orden.

Ejercicio 3 (p. 203) Sean $A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right)$ y $B = \left(b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p\right)$. Por definición de producto de una matriz por un escalar, se tiene:

$$\alpha B = \left(\alpha b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p\right),$$

y el término de posición (i, j) de $A(\alpha B)$ es:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ij}(\alpha b_{kj}) = \alpha \sum_{k=1}^{m} a_{ij} b_{kj},$$

que es el término de posición (i, j) de $\alpha(AB)$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$. En conclusión: $A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Ejercicio 4 (p. 203) Aplicando, primero, la propiedad distributiva por la izquierda y, después, la propiedad distributiva por la derecha, se tiene:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Ejercicio 5 (p. 203) En notación por columnas:

$$A = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_m\right) \quad \text{y} \quad I_m = \left(E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_j \mid \dots \mid E_m\right),$$

y por tanto (cf. proposición III.5, p. 196):

$$AI_m = A\left(E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_j \mid \dots \mid E_m\right) = \left(AE_1 \mid AE_2 \mid \dots \mid AE_j \mid \dots \mid AE_m\right).$$

Por otro lado, de acuerdo con las propiedades del producto de matrices, se tiene que: $AI_m = A$, o bien:

$$AI_m = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_m\right).$$

En conclusión:

$$\left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_j \mid \dots \mid A_m\right) = \left(AE_1 \mid AE_2 \mid \dots \mid AE_j \mid \dots \mid AE_m\right),$$

y $A_j = AE_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Análogamente, como la i-ésima matriz fila de I_n es L_i, se tiene que la i-ésima matriz fila del producto I_nA es igual al producto L_iA; al ser: $I_nA = A$, se deduce que la i-ésima matriz fila de A es igual a L_iA $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Ejercicio 6 (p. 203) Si $E_1, E_2, \dots, E_m$ son las matrices columna de la matriz identidad I_m, entonces se verifica:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_mE_m,$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} AX &= A(x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_mE_m) \\ &= A(x_1E_1) + A(x_2E_2) + \cdots + A(x_mE_m) \\ &= x_1AE_1 + x_2AE_2 + \cdots + x_mAE_m \\ &= x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices, y la tercera y la cuarta son consecuencia de los ejercicios 3 y 5, respectivamente.

Ejercicio 7 (p. 204) Sabemos (cf. ejercicio 4, p. 203):

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2. \tag{26}$$

Si A y B conmutan, es decir: $AB = BA$, entonces el último miembro de (26) toma la forma: $A^2+2AB+B^2$. Pero si A y B no conmutan, entonces: $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

Como comprobación, tomemos las matrices A y B del ejemplo 22 (cf. p. 204). Se verifica:

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado (cf. ejemplo 23, p. 204):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

y

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

y $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Ejercicio 8 (p. 227) Si las matrices A y B son cuadradas de orden n, entonces se verifica:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

y

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

y por tanto AB es invertible y su inversa es $B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 9 (p. 228) Supongamos que la matriz A es cuadrada de orden n. Llamemos B a la matriz inversa de A, y sea $\mathcal{B}$ la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz B, es decir, a la matriz A^{-1}. Queremos demostrar que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

De la definición de matriz inversa, se tiene: $AB = I_n$, de lo que se deduce:

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{I}_n, \tag{27}$$

donde $\mathcal{I}_n$ es la aplicación lineal canónicamente asociada a I_n (y por tanto la identidad de $\mathbb{K}^n$). Operando por la izquierda con $\mathcal{A}^{-1}$ en (27), se obtiene: $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{I}_n$, es decir: $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$, y la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz inversa de A es efectivamente $\mathcal{A}^{-1}$.

RECAPITULACIÓN III

Definición de matriz Consideramos un cuerpo $\mathbb{K}$ y dos enteros positivos n y m:

- **Matriz** A **con términos en** $\mathbb{K}$ **de orden** (n, m): disposición de $n \cdot m$ elementos de $\mathbb{K}$ en forma rectangular en n filas y m columnas (las **filas** y **columnas** de A).
  Matriz **real**: matriz con términos en $\mathbb{R}$.
- **Término** de A de **posición** (i, j): elemento de A situado en la fila i-ésima y la columna j-ésima.
  Se denota: a_{ij}.
- Notaciones para la matriz A de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

  o $A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right)$, o simplemente: $A = \left(a_{ij}\right)$ (si no hay confusión).
  Términos de la i-ésima fila ($1 \leqslant i \leqslant n$) de A: $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$; términos de la j-ésima columna ($1 \leqslant j \leqslant m$) de A: $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$.
- **Matriz fila**: matriz de orden $(1, m)$.
- **Matriz columna**: matriz de orden $(n, 1)$.
- **Matriz cuadrada** de orden n: matriz de orden (n, n) (mismo número de filas que de columnas).
  Términos de la **diagonal principal** de una matriz cuadrada de orden n: los de posición $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$.
- **Matriz identidad**, o unitaria, de orden n con términos en $\mathbb{K}$: matriz cuadrada de orden n con los términos de la diagonal principal iguales a 1 y los restantes iguales a 0.
  Se denota: I_n. Se tiene:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz cero**, o nula, con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m): matriz de orden (n, m) con todos sus términos iguales a 0.
  Se denota: O.

Consideramos una matriz A con términos en $\mathbb{K}$ y de orden (n, m):

- **Matriz columna j-ésima de la matriz** A $(1 \leqslant j \leqslant m)$: matriz columna de orden $(n, 1)$ cuyos términos son los de la j-ésima columna de A.
  Se denota: A_j. Se tiene:
$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$
  La **notación por columnas** de A es: $A = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_m\right)$.
  Las matrices columna de I_n se denotan: $E_1, E_2, \dots, E_n$.
- **Matriz fila i-ésima de la matriz** A $(1 \leqslant i \leqslant n)$: matriz fila de orden $(1, m)$ cuyos términos son los de la i-ésima fila de A: $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}$.
  Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son las matrices fila de A, la **notación por filas** de A es:
$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix}.$$
  Las matrices fila de I_n se denotan: $L_1, L_2, \dots, L_n$.
- **Vector columna** j-ésimo de A $(1 \leqslant j \leqslant m)$: el vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas componentes son los términos de A_j.
  Se denota: $\boldsymbol{a}_j$. Se tiene: $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$.
  Vector fila i-ésimo de A $(1 \leqslant i \leqslant n)$: el vector de $\mathbb{K}^m$ cuyas componentes son los términos de la i-ésima fila de la matriz A; es decir: $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$.

Matriz asociada a una aplicación lineal Consideramos una aplicación lineal f de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$, y unas bases de estos espacios vectoriales: $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ de $\mathbb{K}^m$ y $W = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n)$ de $\mathbb{K}^n$:

- **Matriz asociada** a f, o **representante** de f, en las bases V y W: es la matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ de orden (n, m) cuyos términos de la j-ésima columna $(1 \leqslant j \leqslant m)$ son las n coordenadas de $f(\boldsymbol{v}_j)$ en la base W:
$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{w}_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$
  Caso particular: si $W = B_C$ (base canónica), entonces $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{a}_j$ (j-ésimo vector columna de A, $1 \leqslant j \leqslant m$).
  Propiedad: si $m = n$ (es decir: $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^n$), si V y W son iguales, y si $A = I_n$, entonces f es la identidad de $\mathbb{K}^n$.

- **Aplicación lineal canónicamente asociada** a una matriz $A = (a_{ij})$ con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m): la única aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es A.
  Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} \overset{B_C}{\mathbb{K}^m} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \overset{B'_C}{\mathbb{K}^n} \\ \boldsymbol{e}_j & \dashrightarrow & \boldsymbol{a}_j, \end{array} \quad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

El espacio vectorial $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ Consideramos un cuerpo $\mathbb{K}$ y unos enteros positivos n y m:

- $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ denota el conjunto de las matrices con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m).
- Consideramos dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$. La **suma** de A y B es la matriz (de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$): $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
  El **producto** de un escalar λ por A es la matriz (de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$): $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.
- $(\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano. Su elemento neutro es la matriz O (de orden (n, m)), y el opuesto de A es la matriz: $-A = (-1)A$.
  El conjunto $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la adición de matrices y la multiplicación por los elementos de $\mathbb{K}$.
- Fijadas unas bases, la matriz asociada a la aplicación lineal suma de aplicaciones lineales es la matriz obtenida sumando las matrices asociadas a las aplicaciones.
- Fijadas unas bases, si λ es un escalar y f una aplicación lineal, la matriz asociada a λf es el producto del escalar λ por la matriz asociada a la aplicación f.
- Los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ y $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, ambos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, son isomorfos.
  La aplicación de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ en $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ que a cada aplicación lineal asigna su matriz asociada en las bases canónicas es un isomorfismo.

Producto de matrices Consideramos dos matrices de órdenes (n, m) y (m, p):

$$A = \left(a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\right) \quad \text{y} \quad B = \left(b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p\right):$$

- **Producto** de A por B: matriz $C = (c_{ij})$, de orden (n, p), con: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.
  También se dice: C es el **producto por la izquierda** de B por A, o el **producto por la derecha** de A por B.
  El producto de dos matrices se define sólo cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

Se verifica (notaciones por filas y por columnas):

$$A\left(B_1 \mid B_2 \mid \dots \mid B_p\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \dots \mid AB_p\right), \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \\ \hline \vdots \\ \hline F_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} F_1B \\ \hline F_2B \\ \hline \vdots \\ \hline F_nB \end{pmatrix}.$$

- Fijadas unas bases, si A es la matriz asociada a una aplicación lineal f, y B es la matriz asociada a una aplicación lineal g: la matriz asociada a $f \circ g$ es AB. La aplicación lineal canónicamente asociada a AB es la composición $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$.
- Propiedades de la multiplicación de matrices:
  - ◇ Asociatividad: $A(BC) = (AB)C$;
  - ◇ Distributividad (por la derecha y por la izquierda) respecto de la adición:
    $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2, \quad (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B.$
  - ◇ $I_nA = A = AI_m$;
  - ◇ $OA = O$, $AO = O$.
- Las matrices A y B conmutan si: los productos AB y BA están definidos y coinciden.
  La multiplicación de matrices cuadradas de orden n, con $n \geqslant 2$, no es conmutativa.
- Se tiene la equivalencia:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

  Dada una aplicación lineal f de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$, y fijadas unas bases V y W, respectivamente, si $A = \left(a_{ij}\right)$ es la matriz asociada a f en estas bases, se verifica: la imagen por f del vector de coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_m$ en V es el vector cuyas coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_n$ en W vienen determinadas por la relación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Rango de una matriz

- Rango de una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ de orden (n, m): el rango de los vectores columna de A.
  Se denota: rango A. Por definición: rango A = rango $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m)$.

- Propiedades:
  - ◇ el rango de una matriz es menor o igual que el número de sus filas y que el número de sus columnas;
  - ◇ no se modifica el rango de una matriz permutando entre sí sus columnas;
  - ◇ el rango de una matriz es igual al rango de cualquier aplicación lineal a la que la matriz esté asociada;
  - ◇ $\operatorname{rango}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rango} A, \operatorname{rango} B\}$;
  - ◇ una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada de orden n represente un isomorfismo es que el rango de la matriz sea n;
  - ◇ si A es una matriz cuadrada de orden n de rango igual a n, y B es una matriz de orden (n, m) (ambas matrices con términos en $\mathbb{K}$), entonces: $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango} B$.

Transformaciones elementales de una matriz

- **Transformación elemental** de una matriz: es cualquiera de los tipos:
  - ◇ permutar entre sí dos filas,
  - ◇ multiplicar una fila por un escalar no nulo,
  - ◇ sumar a una fila el resultado de multiplicar otra por un escalar.

  Una transformación elemental conserva el rango de la matriz a la que se aplica.
- **Matriz elemental** de orden n asociada a una transformación elemental: resultado de aplicar la transformación elemental a la matriz identidad I_n.

  Propiedades:
  - ◇ el rango de una matriz elemental de orden n es igual a n,
  - ◇ el resultado de aplicar a una matriz una transformación elemental es el producto por la izquierda de la matriz por la matriz elemental asociada a la transformación elemental.
- Si A es una matriz de orden (n, m), y si $\operatorname{rango}(A) = r \geqslant 1$, y los r primeros vectores columna de A son linealmente independientes, se puede obtener, aplicando a A transformaciones elementales sucesivas, una matriz A' de la forma:

$$A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} n-r \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r}\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)} \quad \dots \quad a'_{1m}}}_{m-r} \end{array} .$$

  Existe una matriz T, cuadrada de orden n, y de rango n, tal que: $TA = A'$.

Inversa de una matriz cuadrada Consideramos una matriz cuadrada A de orden n con términos en $\mathbb{K}$:

- **Inversa** de A: matriz B cuadrada de orden n tal que: $AB = BA = I_n$.
  Se dice: A es **invertible**.
  Si A es invertible, su inversa es única. Se denota: $B = A^{-1}$.
- Propiedades:
  - ◇ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$;
  - ◇ $(A^{-1})^{-1} = A$;
  - ◇ $I_n^{-1} = I_n$
  - ◇ (A es invertible) $\iff$ $\operatorname{rango} A = n$.
- Para el cálculo práctico de A^{-1}: se aplican a I_n las mismas transformaciones elementales sucesivas que llevan la matriz A a la matriz I_n.

Traspuesta de una matriz Consideramos una matriz A con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m):

- **Matriz traspuesta** de A: es la matriz de orden (m, n) cuyo término de posición (i, j) es el de posición (j, i) de A, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.
  Se denota: A^t.
- Propiedades:
  - ◇ $I_n^t = I_n$;
  - ◇ $(A^t)^t = A$;
  - ◇ $(A + B)^t = A^t + B^t$;
  - ◇ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
  - ◇ $(BA)^t = A^t B^t$;
  - ◇ $\operatorname{rango} A^t = \operatorname{rango} A$;
  - ◇ si A es cuadrada e invertible: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

CAPÍTULO IV

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ESQUEMA – RESUMEN

INTRODUCCIÓN

Definiciones y propiedades Una *ecuación lineal* en las *incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ es una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = c,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son números reales, que llamaremos *coeficientes* de la ecuación, y c es otro número real, que llamaremos *término independiente* de la ecuación. Por ejemplo, las tres siguientes son ecuaciones lineales en las incógnitas x_1, x_2 y x_3:

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \quad x_3 = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{5}x_1 + 4x_3 = 0.$$

Los coeficientes de la primera ecuación son 1, -1 y -3; los de la segunda: 0, 0 y 1; y los de la tercera: $-1/5$, 0 y 4. Los tres términos independientes son 2, 1 y 0, respectivamente. Las siguientes también son ecuaciones en las incógnitas x_1, x_2 y x_3, pero *no* son lineales:

$$x_1x_2 + x_3 = 2, \quad x_1^2 + 3x_2 - x_3 = -1, \quad 2x_1 - \frac{1}{x_3} = 1.$$

Muchas veces se emplean otras letras para designar las incógnitas, como x, y, z, t o u. Por ejemplo, estas son ecuaciones lineales en las incógnitas x, y, z y t:

$$2x + 3y - 2z + t = -3 \quad \text{y} \quad -2y - z - t = 1.$$

Estamos interesados en los *sistemas* de ecuaciones lineales, que no son más que un conjunto de ecuaciones lineales consideradas simultáneamente, todas en las mismas incógnitas. Por ejemplo, el siguiente es un sistema de dos ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Nótese que ambas son efectivamente ecuaciones en las mismas incógnitas: x_1, x_2, x_3 y x_4.

Todos los sistemas admiten una notación matricial, de suma importancia para un ulterior estudio del sistema. Por un lado, se define la llamada *matriz asociada* al sistema, que tiene tantas filas como ecuaciones y tantas columnas como incógnitas, y cuyos términos son los coeficientes de las ecuaciones (colocados en el mismo orden en el que figuran en el sistema). Por otro lado, se define la *matriz de incógnitas,* que es la matriz columna cuyos términos son las incógnitas del sistema. Y finalmente se define la *matriz de términos independientes,* que es la matriz columna cuyos términos son los términos independientes de las ecuaciones. Estas matrices suelen denotarse con las letras A, X y C, respectivamente; la notación matricial del sistema es entonces esta: $AX = C$.

Escribamos la notación matricial del sistema que hemos puesto de ejemplo dos párrafos antes. Su matriz asociada será de orden $(2,4)$ (tantas filas como ecuaciones y tantas columnas como incógnitas); en su primera fila tendrá como términos los coeficientes de la primera ecuación, esto es: 2, 0, 3 y -1; en su segunda fila, los coeficientes de la segunda ecuación: 1, 1, 4 y 1. La matriz asociada es entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su matriz de incógnitas y su matriz de términos independientes son las matrices columna cuyos términos son las incógnitas y los términos independientes del sistema, respectivamente; es decir:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La notación matricial del sistema es: $AX = C$, que toma esta forma concreta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que si efectuamos el producto del primer miembro, la igualdad anterior se transforma en esta:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que es equivalente al sistema propiamente dicho.

Además de las tres matrices que acabamos de ver, para un sistema de ecuaciones lineales dado se define otra matriz, que recoge toda la información necesaria sobre el sistema: la llamada *matriz ampliada* del sistema, formada adjuntando a la matriz asociada la matriz de términos independientes (esto es, añadiendo a la matriz asociada una columna más, cuyos términos son los términos independientes de las ecuaciones). Si la matriz asociada se ha denotado por A y la de términos independientes por C, la matriz ampliada se escribe: $(A \mid C)$. Para el ejemplo de sistema que venimos considerando, su matriz ampliada se escribe así:

$$(A \mid C) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Un concepto muy importante es el de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales de matriz asociada A y de matriz de términos independientes C (o dicho de otra forma: el sistema $AX = C$, o también: el sistema de matriz ampliada $\left(A \mid C\right)$). Llamaremos solución del sistema a toda matriz columna X_1 tal que el producto AX_1 es igual a la matriz C. Para el sistema que venimos considerando como ejemplo, una solución es esta matriz columna:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué significa esto? Que si multiplicamos la matriz asociada del sistema por esta matriz X_1, obtenemos como resultado la matriz de términos independientes. Tenemos:

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = C,$$

lo que prueba que efectivamente la matriz X_1 es una solución del sistema. Nótese que si en el sistema propiamente dicho sustituimos las incógnitas por los términos correspondientes de la matriz X_1, es decir, si sustituimos x_1, x_2, x_3 y x_4 por 1, -2, 0 y 0, respectivamente, entonces obtenemos dos identidades (una por cada ecuación):

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \qquad\qquad + 3 \cdot 0 - 0 = 2 \\ \phantom{2 \cdot {}} 1 + (-2) + 4 \cdot 0 + 0 = -1. \end{cases}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales verifica uno y sólo uno de estos asertos: no admite solución, admite exactamente una solución, o admite infinitas soluciones.[1] Entenderemos por *discutir* un sistema la tarea de averiguar cuál de estos tres asertos se verifica para el sistema; es decir, averiguar si admite solución o no, y en caso afirmativo si sólo admite una o admite infinitas. Y entenderemos por *resolver* el sistema averiguar concretamente todas las matrices columna —una o infinitas— que sean solución del sistema caso de que admita alguna.

La tarea de *discutir* un sistema requiere solamente un cálculo de rangos. El resultado fundamental es este: un sistema de ecuaciones lineales admite alguna solución si y solamente si el rango de su matriz asociada coincide con el rango de su matriz

[1] Los sistemas que no admiten solución se denominan *incompatibles*; los que la admiten, *compatibles*. Los sistemas compatibles se califican además de *determinados* o de *indeterminados*, según admitan sólo una solución o infinitas, respectivamente. Esta nomenclatura, común en muchos manuales que tratan los sistemas de ecuaciones lineales, no se utiliza en este texto.

ampliada; además, en caso de coincidencia, es decir, en caso de admitir solución, el sistema admite solución única si tal valor común del rango es igual que el número de incógnitas, y admite infinitas soluciones si tal valor del rango es menor que el número de incógnitas. Para el sistema que venimos considerando como ejemplo, se tiene:

$$\text{rango}\, A = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{rango}\left(A \mid C\right) = \text{rango}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) = 2,$$

luego el sistema admite solución (ya lo sabíamos: habíamos puesto un ejemplo); pero además este valor común del rango es menor que el número de incógnitas del sistema (éste es 4 y aquél es 2), luego el sistema admite infinitas soluciones.

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (nótese que estamos denotando éstas con las letras x y y). La matriz asociada y la matriz ampliada son, respectivamente, estas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

El rango de la primera es igual a 1 (ambas filas son proporcionales), pero la segunda tiene rango igual a 2 (ambas filas no son proporcionales): el sistema no admite solución.

Y otro ejemplo más de sistema, que introducimos directamente en notación matricial. Consideramos este sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Sus matrices asociada y ampliada son, respectivamente, estas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ambas son de rango igual a 3, como el lector puede calcular. Se trata, entonces, de un sistema que admite solución, y solución única, pues el valor común del rango coincide con el número de incógnitas.

En la sección siguiente veremos cómo abordar el problema de *resolver* un sistema de ecuaciones del cual sabemos, por haberlo *discutido* previamente, que admite solución. Pero antes de terminar esta sección queremos hablar de sistemas *equivalentes*: que dos sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes significa que ambos tienen el mismo conjunto de soluciones (si ninguno de los dos admite solución, se consideran también equivalentes: en este caso el conjunto de soluciones sería, para ambos, el vacío). Un resultado importante establece que, dado un sistema de ecuaciones, podemos escribir otro equivalente a él aplicando a la matriz asociada y a la de términos independientes una misma transformación elemental por filas. Más en concreto, si $AX = C$ es un sistema de ecuaciones lineales (dado en notación matricial), y si A' y C' son el resultado de aplicar a las matrices A y C, respectivamente, una misma trasnformación elemental (por filas), entonces los sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$ son equivalentes: o ninguno de ellos tiene solución, o ambos tienen las mismas soluciones, esto es, si una matriz columna es solución de uno, también lo es del otro. A modo de muestra de lo dicho, consideremos el sistema que hemos puesto antes como ejemplo de sistema de una única solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Apliquemos, tanto a su matriz asociada como a su matriz de términos independientes, la transformación elemental $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ (esto es: sumar a la segunda fila la primera multiplicada por -2):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dicho de otra forma, más cómoda: apliquemos a la *matriz ampliada* del sistema la transformación elemental $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

El sistema original es entonces equivalente a este:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ - 9x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

de su segunda ecuación se obtiene: $x_3 = 2/9$, que sustituido en la tercera proporciona: $x_2 = 2 - 2/9 = 16/9$, y finalmente de la primera resulta: $x_1 = 31/9$. La única solución de este último sistema, y por ende del original (pues son equivalentes), es entonces esta matriz columna:

$$\begin{pmatrix} 31/9 \\ 16/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

El método que utilizaremos en la sección siguiente para resolver un sistema se basa en lo que acabamos de ver en este ejemplo: mediante transformaciones elementales por filas aplicadas a la matriz ampliada del sistema (que es tanto como decir que se aplican simultáneamente a la matriz asociada y a la de términos independientes), se trata de llegar a un sistema equivalente al original y fácil de resolver.

Quizá el lector se pregunte por el efecto en un sistema de ecuaciones lineales de una transformación elemental *por columnas*. Sólo emplearemos, y ya veremos cuándo será necesario, las de tipo I, es decir, el intercambio de columnas. Para ver qué ocurre, fijémonos en el primer sistema de ecuaciones que consideramos como ejemplo al principio de este apartado:

$$\begin{cases} 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Si intercambiamos las dos primeras columnas en su matriz ampliada (en particular, no tocamos los términos independientes), obtenemos esta matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

que corresponde con este sistema:

$$\begin{cases} \phantom{x_1+{}} 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Fijémonos en que la diferencia entre este sistema y el original no es más que un *intercambio de incógnitas*: si en uno de los dos intercambiamos las incógnitas x_1 y x_2, obtenemos el otro. No podemos decir que los dos sistemas sean equivalentes, pues toda solución de uno no es necesariamente solución del otro. Pero a partir de una matriz columna que sea solución de uno de ellos, sí podemos obtener una matriz columna que sea solución del otro: intercambiando sus dos primeros términos, que son los que se corresponden con las incógnitas x_1 y x_2. Por ejemplo, de esta matriz columna sabemos es solución del sistema original:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos una solución del segundo sistema intercambiando sus dos primeros términos:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En resumen: un intercambio de columnas de la matriz asociada de un sistema se traduce en un intercambio de las incógnitas correspondientes a esas columnas; las soluciones de uno de los dos sistemas se pueden obtener de las del otro intercambiando los términos correspondientes.

Nota bene Si intercambiamos dos columnas de la matriz ampliada de un sistema, una de ellas no debe ser la última columna (es decir, la de términos independientes), pues ello nos llevaría a otro sistema completamente distinto. ▲

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales En el texto, aprendemos a resolver primero los llamados sistemas ***homogéneos***, que son aquellos cuyos términos independientes son todos nulos, es decir, los de la forma: $AX = O$. Lo primero que observamos de un sistema homogéneo es que admite al menos una solución: la matriz nula correspondiente (dicho informalmente: obtenemos una solución si damos a todas las incógnitas el valor 0), con lo que la discusión de un sistema homogéneo se reduce a determinar si esta solución nula es única o no. Ello se averigua calculando el rango de la matriz asociada: si este rango es igual al número de incógnitas, la solución nula será única; si tal rango es menor que el número de incógnitas, habrá infinitas soluciones (de las cuales una será la nula). El siguiente es un ejemplo de sistema homogéneo con una única solución:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto: el rango de su matriz asociada es igual a 2, y son dos las incógnitas, luego el sistema admite únicamente la solución nula; en este caso, ésta es la matriz columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Nótese que si sustituimos tanto x_1 como x_2 por 0 en la expresión del sistema, obtenemos efectivamente dos identidades.)

Fijémonos ahora en este otro sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos su matriz asociada por A. La matriz A tiene rango igual a 2 y el sistema cuenta con tres incógnitas, un número mayor que el rango, luego hay infinitas soluciones. Para encontrarlas, buscamos un sistema equivalente fácil de resolver, y para ello hacemos uso de una propiedad que hemos visto en el apartado anterior: podemos obtener un sistema equivalente a uno dado aplicando una misma transformación elemental por filas tanto a la matriz asociada como a la matriz de términos independientes (o directamente a la matriz ampliada, que es una forma de aplicar la transformación simultáneamente a las dos matrices citadas). Ahora bien, no debemos preocuparnos por la matriz de términos independientes de un sistema homogéneo, pues se trata de una matriz nula y cualquier transformación elemental que le apliquemos tendrá la misma matriz nula como resultado. Buscamos, entonces, aplicar transformaciones elementales a la matriz A que nos permitan obtener una matriz cuyo sistema homogéneo correspondiente sea fácil de resolver. De acuerdo con lo visto en el capítulo III (verbigracia, cf. p. 168), a partir de la matriz A, y aplicándole transformaciones elementales sucesivas, podremos obtener una matriz A' de la forma:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix}$$

(los puntos señalan posiciones que podrían ser ocupadas por cualquier número real); en concreto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow (1/4) F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que el sistema original: $AX = O$, y el sistema $A'X = O$ son equivalentes. Este último sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos: $x_1 = -x_3$, y la segunda nos dice directamente que x_2 es nulo; si denotamos: $\lambda = -x_3$, podemos afirmar que, cualquiera que sea el valor del número λ, es una solución del sistema $A'X = O$ la siguiente matriz columna:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, el sistema original tiene por solución cualquier matriz columna de esta forma:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Dando valores al *parámetro* λ, vamos obteniendo distintas soluciones del sistema (para $\lambda = 0$, por ejemplo, obtenemos la solución que ya conocíamos desde el principio: la nula). Queremos añadir que es posible dar directamente la solución final (1) a la vista de la matriz A', sin necesidad de escribir y resolver el sistema $A'X = O$; en el texto (cf. p. 278) se explica una regla general para ello, que trataremos de desgranar en este y en otros ejemplos. De acuerdo con esta regla, la solución final del sistema consta de una o más matrices columna, sumadas si son más de una, cada una de ellas multiplicada por un parámetro distinto. Hay tantas matrices de este tipo, o tantos parámetros, como marca la diferencia entre el número de incógnitas del sistema y el rango. En nuestro caso, esta diferencia es igual a 1, por eso sólo hay un parámetro (que denotamos por λ), multiplicado por una matriz columna. Esta matriz columna tiene tantos términos como incógnitas, tres en nuestro caso, y se "construye" así: sus dos primeros términos (tantos como el rango) se obtienen de la última columna de la matriz A', y su último término se establece igual a -1. Lo resumimos en este esquema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \\ \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esta última matriz columna, acompañada por el parámetro λ, es precisamente la que obtuvimos en (1).

Nota bene Cuando aplicamos esta regla para escribir la solución de un sistema a partir de *su* matriz A' *habiendo un solo parámetro*, la matriz columna que acompaña a éste en la expresión de la solución se construye así: sus primeros términos, tantos como el rango, se "copian" de la última columna de la matriz A' (de la forma que sugiere el esquema anterior), y aún quedará un término por completar: se rellena con el número -1. ▲

Consideremos a continuación este otro ejemplo de sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada, que vamos a denotar por B, tiene rango igual a 2, y son cuatro las incógnitas, luego admite infinitas soluciones; para encontrarlas procedemos como en el ejemplo anterior. A partir de la matriz B, y aplicándole transformaciones elementales por filas sucesivas, podemos obtener una matriz B' de la forma:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(los puntos, como es habitual, señalan posiciones que pueden ser ocupadas por cualquier número). Concretamente, tras aplicar sucesivamente a la matriz B las transformaciones elementales $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1$, $F_2 \leftarrow (-1/3)F_2$, $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$ y $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2$, obtenemos:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema original: $BX = 0$, es entonces equivalente al sistema homogéneo de matriz asociada la matriz B': $B'X = 0$. Podríamos escribir éste y resolverlo, como hicimos en el ejemplo anterior, pero vamos a mostrar cómo se aplica la regla del texto para obtener la solución directamente a partir de la matriz B'.[2] La diferencia entre el número de incógnitas y el rango es: $4 - 2 = 2$, así que la solución consta de la suma de dos matrices columna multiplicadas por sendos parámetros. Cada una de estas matrices columna tiene cuatro términos (pues cuatro son las incógnitas): los dos primeros (tantos como el rango) se copian de las dos últimas columnas de la matriz B', y los dos restantes se rellenan así: -1 y 0 para la primera matriz, y 0 y -1 para la segunda; todo según este esquema:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|} \cline{3-4} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \lambda \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/3 \\ -4/3 \end{matrix}} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2/3 \\ -4/3 \end{matrix}} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por λ y μ los dos parámetros, podemos concluir que la solución del sistema original es cualquier matriz columna de esta forma:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$

Nota bene Cuando aplicamos la regla para escribir la solución final de un sistema *habiendo dos parámetros*, las sendas matrices columna que los acompañan en la expresión de la solución se construyen así: sus primeros términos, tantos como el rango, se "copian" de las últimas columnas de la matriz A' (de la forma que sugiere el esquema), y todavía quedarán dos términos por completar en ambas matrices columna: la primera matriz se rellena con -1 y 0 (de arriba abajo), y la segunda con 0 y -1. ▲

En el texto figuran más ejemplos de resolución de sistemas homogéneos, todos resueltos según el esquema de trabajo que hemos seguido en los párrafos anteriores.

[2]Recuérdese que esta regla se explica en la p. 278.

Comentemos cómo se generaliza la regla que estamos utilizando para escribir la solución final: hay tantos parámetros, cada uno con su matriz columna, como marca la diferencia entre el número de incógnitas y el rango. Los primeros términos de estas matrices columna, tantos como el rango, se copian de las últimas columnas de la matriz A' correspondiente (la que habremos obtenido de la matriz asociada del sistema mediante transformaciones elementales por filas adecuadas), según se sugiere en los esquemas que hemos visto en los ejemplos anteriores. Con esta operación todavía estarán pendientes de rellenar en cada matriz columna tantos términos como parámetros haya. Si hay un solo parámetro, y por tanto un solo término por rellenar, éste se fija igual a -1, como hemos visto; si hay dos, éstos se rellenan con -1 y 0 para la primera matriz y con 0 y -1 para la segunda; si hay tres: -1, 0 y 0 para la primera, 0, -1 y 0 para la segunda, y 0, 0 y -1 para la tercera; y así sucesivamente.

Antes de pasar a ver la resolución de un sistema general, veamos un ejemplo más, en el que tendremos que realizar una transformación elemental por columnas. Consideremos el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Su matriz asociada, que denotamos por D, tiene rango igual a 2, y son tres las incógnitas, así que se trata de un sistema homogéneo con infinitas soluciones; para encontrarlas procedemos como en los ejemplos anteriores. A partir de la matriz D, y mediante la aplicación de transformaciones elementales sucesivas, podemos obtener una matriz D' de esta forma:

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix};$$

en concreto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow (1/4)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde "$C_2 \leftrightarrow C_3$" designa la transformación elemental de intercambiar las columnas segunda y tercera. Hemos obtenido:

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pero nos hemos visto obligados a aplicar, además de transformaciones elementales por filas, una transformación elemental por columnas (para precisar, un intercambio de columnas). No podemos decir que el sistema original sea equivalente al sistema $D'X = 0$, pero si resolvemos éste podremos obtener de su solución la solución de aquél, pues un intercambio de columnas —como vimos en el primer apartado— se traduce en un intercambio de las incógnitas correspondientes: en este caso, de las incógnitas x_2 y x_3. Notemos que el sistema $D'X = O$ es precisamente el sistema $A'X = O$ que resolvimos en el segundo ejemplo de este apartado; sus soluciones son las matrices columna de esta forma:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si intercambiamos los términos segundo y tercero (que son los que se corresponden con las incógnitas x_2 y x_3), obtenemos finalmente la solución del sistema original:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Una vez sabemos resolver un sistema homogéneo, estamos en disposición de resolver un sistema general $AX = C$, con términos independientes no necesariamente nulos. Debemos suponer, por supuesto, que el sistema admite solución, de lo que nos podemos dar cuenta discutiéndolo previamente. Recordemos: el sistema admite solución si y solamente si el rango de la matriz asociada y el de la matriz ampliada coinciden; y cuando hay solución, si tal rango común es igual que el número de incógnitas, la solución es única; si es menor, hay infinitas soluciones.

Pongámonos primero en el caso de una única solución. Veamos con un ejemplo la forma de proceder. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos su matriz asociada por A y su matriz de términos independientes por C. Tanto la matriz A como la ampliada $\left(A \mid C\right)$ tienen rango igual a 3, y son tres las incógnitas, luego el sistema admite efectivamente solución única. Para resolverlo, utilizamos esencialmente el mismo procedimiento que para los sistemas homogéneos: buscar un sistema equivalente más sencillo de resolver mediante la aplicación de unas mismas transformaciones elementales por filas sucesivas tanto a la matriz asociada como a la matriz de términos independientes (o directamente a la matriz ampliada, que es una forma de aplicar las transformaciones simultáneamente a las dos matrices citadas). Igual que con los sistemas homogéneos, buscamos llevar la matriz asociada del sistema a la forma más sencilla que vimos en el capítulo II (verbigracia, cf. p. 168); pero a diferencia de ellos, ahora sí debemos preocuparnos por la matriz de términos independientes, porque si esta matriz no es nula, una transformación elemental puede cambiar su valor. En este ejemplo que nos ocupa, como la matriz A es cuadrada de orden 3 y de rango igual a 3, a partir de ella podremos obtener una matriz A' de esta forma:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, precisamente la matriz identidad I_3. Apliquemos, pues, transformaciones elementales por filas sucesivas a la matriz ampliada $\left(A \mid C\right)$, de forma que lleguemos a sustituir la matriz A por la matriz A' (o lo que es lo mismo, por la matriz identidad I_3):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Si denotamos la matriz de términos independientes de la última matriz ampliada por C', entonces hemos obtenido:

$$\left(A' \mid C'\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema original es entonces equivalente al sistema de matriz ampliada $\left(A' \mid C'\right)$, es decir, al sistema $A'X = C'$. Éste toma la forma:

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} = -1 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 \phantom{{}+x_3} = 2 \\ \phantom{x_1+x_2+{}} x_3 = 0, \end{cases}$$

y su solución única es inmediata; esta solución, que también es la solución única del sistema original, es la siguiente matriz columna:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con los sistemas generales, también se describe en el texto (cf. p. 280) una regla para escribir la solución final a la vista de la matriz ampliada obtenida $\left(A' \mid C'\right)$.

Esta regla, aplicada al caso particular de un sistema con solución única, nos dice que formemos la matriz columna solución con los primeros términos de la matriz C', copiando tantos como marca el rango; como el rango y el número de incógnitas coinciden, no quedarán más términos que rellenar. En este ejemplo, el rango es igual a 3, así que formamos la solución con los tres primeros términos de la matriz C' (en este caso, acontece que se trata de todos los términos de la matriz C'); esquemáticamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}}\right).$$

Veamos otro ejemplo de sistema que admite solución única. Consideremos el siguiente sistema, que difiere del anterior en que tiene una ecuación más:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos la matriz asociada por G y la matriz de términos independientes por N. La matriz G y la matriz $\left(G \mid N\right)$ tienen ambas rango igual a 3, y tres son las incógnitas, así que efectivamente es un sistema que admite solución única; para encontrarla, procedemos como en el ejemplo anterior. A partir de la matriz G, es posible obtener, mediante la aplicación de transformaciones elementales por filas sucesivas, una matriz de esta forma:

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos, pues, a la matriz ampliada $\left(G \mid N\right)$ transformaciones elementales por filas sucesivas de forma que consigamos sustituir la matriz G por la matriz G'. Con las transformaciones elementales siguientes: $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 + F_1$, $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 - F_2$, $F_1 \leftarrow F_1 + F_3$ y $F_4 \leftarrow F_4 - F_3$, llegamos a esta matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si denotamos por N' la matriz de términos independientes de la matriz ampliada anterior, la matriz columna solución estará formada por los primeros términos de la matriz N', tantos como marca el rango; es decir, la matriz solución estará formada por los tres primeros términos de N':

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene la misma solución que el sistema del ejemplo anterior, aun teniendo una ecuación más.

Cuando un sistema admite solución única y tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, se puede resolver con un método diferente del visto en los ejemplos anteriores, que también se explica en el texto (cf. p. 282). Notemos el sistema por $AX = C$. La matriz A es entonces cuadrada, y al tener solución única el sistema, el rango de A es igual que el número de sus filas e igual que el número de sus columnas; es decir, la matriz A es invertible. En la igualdad $AX = C$ podemos multiplicar por la inversa de A: $A^{-1}AX = A^{-1}C$, o bien: $X = A^{-1}C$. Es decir, podemos obtener la única solución del sistema multiplicando la inversa de la matriz asociada por la matriz de términos independientes. Como muestra de ello, recordemos que dos ejemplos atrás hemos resuelto un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas y con solución única:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada de este sistema es invertible, y de inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema puede encontrarse multiplicando esta inversa por la matriz C de términos independientes:

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

esta última matriz columna es efectivamente la solución que obtuvimos.

Pasamos ahora a tratar la resolución de un sistema $AX = C$ del que sabemos admite infinitas soluciones; procedemos, como en casos anteriores, con un ejemplo. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 3, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada de este sistema es la misma que la matriz asociada del sistema homogéneo que vimos en la página 253; allí la denotamos por B. Denotemos a su vez por E la matriz de términos independientes de este ejemplo que estamos considerando. El rango de B es igual a 2, y también el de la matriz ampliada $\left(B \mid E\right)$, y las incógnitas son cuatro, así que se trata efectivamente de un sistema que admite infinitas soluciones. El procedimiento para encontrarlas es el mismo que hemos seguido hasta ahora: aplicar transformaciones elementales sucesivas a la matriz ampliada hasta llegar a la matriz ampliada de un sistema que sea sencillo de resolver. A partir de la matriz B, aplicándole transformaciones elementales sucesivas adecuadas, es posible obtener una matriz B' de esta forma:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En concreto, tal y como vimos en el ejemplo de sistema homogéneo citado, aplicando sucesivamente a la matriz B las transformaciones elementales $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1$, $F_2 \leftarrow (-1/3)F_2$, $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$ y $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_2$, llegamos a:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos estas mismas trasformaciones a la matriz ampliada $\left(B \mid E\right)$, llegamos entonces a una matriz ampliada de la forma $\left(B' \mid E'\right)$ para alguna matriz columna E'; precisamente lo que obtenemos es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(B' \mid E'\right).$$

Como sucedía en los ejemplos anteriores, a la vista de la matriz ampliada obtenida $\left(B' \mid E'\right)$ es posible escribir directamente la solución final. La regla básica es esta: la solución del sistema es igual a la suma de una solución particular (es decir, una cualquiera de las infinitas que tiene) y la solución del sistema homogéneo correspondiente (el que se obtiene anulando los términos independientes, es decir: $\left(B \mid O\right)$, que es equivalente al $\left(B' \mid O\right)$). Esto último: la solución del sistema homogéneo correspondiente, se escribe a partir de la matriz B'; ya lo hicimos en el ejemplo citado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1/3 & -2/3 \\ -4/3 & -4/3 \end{matrix}} & & 1 \\ 0 & 1 & & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \lambda \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/3 \\ -4/3 \end{matrix}} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2/3 \\ -4/3 \end{matrix}} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y una solución particular se puede encontrar a partir de la matriz E'. Tal solución particular es una matriz columna de tantos términos como incógnitas: los primeros, tantos como el rango, son los primeros de la matriz E'; los restantes, tantos como marca la diferencia entre el número de incógnitas y el rango (o lo que es lo mismo: tantos como parámetros), se fijan iguales a 0. En este caso, los *dos* —el rango es igual a 2— primeros términos de la solución son los primeros términos de E': 1 y -2, y los *dos* —hay dos parámetros— términos restantes son 0 y 0. Esquemáticamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & \boxed{\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}} \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, es solución del sistema original cualquier matriz columna de esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}.$$

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales En esta sección se ofrecen diversas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Algunas ya han sido apuntadas en las introducciones de capítulos pasados, o en los mismos capítulos: coordenadas de un vector en una base, intersección de subespacios vectoriales, etc.

Coordenadas de un vector en una base Consideremos la siguiente base[3] de $\mathbb{R}^2$: $B = ((1,3),(2,5))$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,5)$ en esta base? Si las denotamos por α y β, estos números son tales que: $\alpha(1,3) + \beta(2,5) = (1,5)$. Esta igualdad vectorial es equivalente a estas dos igualdades: $\alpha + 2\beta = 1$ y $3\alpha + 5\beta = 5$, que podemos escribir como un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas α y β:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 5\beta = 5. \end{cases}$$

Apliquemos a la matriz ampliada de este sistema transformaciones elementales por filas sucesivas hasta llegar a una matriz de esta forma:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \end{array}\right)$$

[3] Cf. capítulo I.

(recuérdese que con el punto designamos posiciones que pueden ser ocupadas por cualquier número real). Obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow -F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

A la vista de la matriz de términos independientes de la matriz ampliada obtenida, concluimos que la solución del sistema es esta matriz columna:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas del vector $(1,5)$ en la base $B = ((1,3),(2,5))$ son, pues, 5 y -2. A modo de comprobación: $5(1,3) - 2(2,5) = (1,5)$.

Cálculo de una base de un subespacio vectorial dado por ecuaciones Consideremos los subespacios vectoriales[4] F y G de $\mathbb{R}^3$ definidos, respectivamente, por la ecuación $x_1 + x_2 = 0$ y por la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$; esto es:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\} \quad \text{y} \quad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}.$$

¿Cómo podemos encontrar una base de la intersección $F \cap G$? Si denotamos esta intersección por H, entonces podemos escribir:

$$H = F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ y } x_1 - 2x_3 = 0\}.$$

La pregunta que hemos formulado tiene, pues, la misma respuesta que esta: ¿cómo encontrar una base del subespacio vectorial de ecuaciones $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - 2x_3 = 0$?

Un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ pertenece al subespacio vectorial H precisamente si sus componentes verifican, a la vez, las ecuaciones $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - 2x_3 = 0$. Podemos decir esto de otra forma: el vector (x_1, x_2, x_3) pertenece a H precisamente si la matriz columna que tiene por términos x_1, x_2, y x_3 es solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{}-2x_3} = 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Busquemos, pues, las soluciones de este sistema homogéneo. Aplicando las transformaciones elementales $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$, $F_2 \leftarrow -F_2$ y $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$ a la matriz asociada de este sistema, obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

[4] Cf. capítulo I.

así que las soluciones del sistema son las matrices columna de la forma:

$$\lambda\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ pertenece, pues, al subespacio vectorial H precisamente si es de la forma: $\lambda(-2,2,-1)$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}$. Se tiene entonces: $H=\mathbb{R}(-2,2,-1)$, y una base de H es $((-2,2,-1))$.

Para encontrar una base de un subespacio vectorial dado por unas ecuaciones, no tenemos entonces más que resolver el sistema formado por esas ecuaciones. Los vectores cuyas componentes son los términos de las matrices columna que figuran en la solución son los vectores de la base buscada.

Intersección de subespacios afines dados por ecuaciones Consideremos los hiperplanos[5] H_1, H_2 y H_3 de $\mathbb{R}^4$ de ecuación $x_1+x_2-x_3-2x_4=-1$, $2x_1-x_2+2x_3=4$ y $3x_1+x_3-2x_4=3$, respectivamente. Son subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ (recordemos que todo hiperplano es subesapcio afín), y su intersección, si no es vacía, también es un subespacio afín de $\mathbb{R}^4$. ¿De cuál se trata? Lo que pretendemos es encontrar un vector y un subespacio vectorial, ambos de $\mathbb{R}^4$, tales que podamos escribir $H_1\cap H_2\cap H_3$ como suma del vector y del subespacio vectorial.

Este problema es similar al que nos planteábamos en el parágrafo anterior con subespacios vectoriales. Para resolverlo, no tenemos más que plantearnos y resolver el sistema formado por las ecuaciones que definen los hiperplanos:

$$\begin{cases} x_1+x_2-\ x_3-2x_4=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3 \qquad\ \ =\ \ 4\\ 3x_1 \qquad\ +\ x_3-2x_4=\ \ 3.\end{cases}$$

Dadad una solución de este sistema, el vector cuyas componentes son los términos de la matriz columna solución es un vector de la intersección; y recíprocamente: dado un vector del subespacio afín intersección, la matriz columna de términos sus componentes es solución del sistema.

Nótese que el sistema anterior fue el último que resolvimos en el apartado dedicado a la resolución de sistemas. Las soluciones son las matrices columna de la forma:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1/3\\-4/3\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2/3\\-4/3\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R} \text{ y } \mu\in\mathbb{R}.$$

[5] Cf. capítulo I.

Así, podemos decir que la intersección $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ está formada por los vectores de esta forma: $(1, -2, 0, 0) + \lambda(1/3, -4/3, -1, 0) + \mu(-2/3, -4/3, 0, -1)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y algún $\mu \in \mathbb{R}$. En conclusión:

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 = (1, -2, 0, 0) + \mathbb{R}(1/3, -4/3, -1, 0) + \mathbb{R}(-2/3, -4/3, 0, -1),$$

y una igualdad como esta es la que buscábamos.

Otro ejemplo. ¿Cuál es la intersección del subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ definido por la ecuación $x_1 + x_2 = 1$ con el definido por la ecuación $x_1 - 2x_2 = -2$? Escribimos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -2. \end{cases}$$

Tiene solución única:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

así que la intersección de los dos subespacios afines se reduce a un conjunto formado por un único vector: $\{(0, 1)\}$.

Determinación de unas ecuaciones para un subespacio vectorial del que conocemos un sistema de generadores Denotemos por F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado[6] por los vectores $(1, -1, 2)$ y $(2, 0, 4)$. Nos gustaría disponer de una o unas ecuaciones que definan este subespacio vectorial. Notemos que un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ pertenece a F precisamente si se puede escribir como combinación lineal de los generadores $(1, -1, 2)$ y $(2, 0, 4)$, es decir, precisamente si existen dos números α y β tales que:

$$\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 0, 4) = (x_1, x_2, x_3).$$

Esta igualdad vectorial es equivalente a: $\alpha + 2\beta = x_1$, $-\alpha = x_2$ y $2\alpha + 4\beta = x_3$, que podemos escribir en forma de sistema en las incógnitas α y β:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x_1 \\ -\alpha = x_2 \\ 2\alpha + 4\beta = x_3. \end{cases}$$

Los vectores (x_1, x_2, x_3) de F son precisamente aquellos para los cuales este sistema de ecuaciones admite solución; deberíamos, pues, discutir el sistema en función de los valores de x_1, x_2 y x_3. Pero en vez de discutir directamente este sistema, discutamos uno equivalente más sencillo; como siempre, conseguimos tal sistema

[6] Cf. capítulo I.

equivalente con la aplicación a la matriz ampliada de transformaciones elementales adecuadas. Intentemos que la matriz del sistema se transforme en una de esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rsulta (ojo al aplicar las transformaciones elementales a la última columna):

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 2 & 4 & x_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ 2 & 4 & x_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow (1/2)F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & (x_1 + x_2)/2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & (x_1 + x_2)/2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right).$$

Fijémonos en la última matriz ampliada obtenida: es la de un sistema cuya matriz asociada tiene rango igual a 2, y cuya matriz ampliada tiene rango igual a 2 o a 3 según sea nulo o no, respectivamente, el término $x_3 - 2x_1$. Podemos decir entonces que el sistema original tiene solución si y solamente si $x_3 - 2x_1 = 0$. Pero esto es lo mismo que decir lo siguiente: el vector (x_1, x_2, x_3) pertenece a F si y solamente si $x_3 - 2x_1 = 0$. Ésta es una ecuación que define el subespacio vectorial F.

Sobre el núcleo y la imagen de una aplicación lineal Los sistemas de ecuaciones lineales resultan especialmente útiles para averiguar datos sobre una aplicación lineal.[7] Consideremos, por ejemplo, la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 3x_3 - x_4, 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_3),$$

que tiene por matriz asociada en las bases canónicas la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Estamos interesados en encontrar una base del núcleo de f y en encontrar unas ecuaciones de la imagen de f.

[7] Cf. capítulo II.

Recordemos que la igualdad vectorial $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1,y_2,y_3)$ es equivalente a esta igualdad matricial:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, el vector de $\mathbb{R}^3$ de componentes y_1, y_2 y y_3 pertenece a la imagen de f si y sólo si la igualdad matricial anterior se verifica para algunos números x_1, x_2, x_3 y x_4. Viendo esta igualdad matricial como un sistema de tres ecuaciones en las incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4, podemos decir entonces que el vector de componentes y_1, y_2 y y_3 pertenece a la imagen de f si y sólo si el sistema anterior, con y_1, y_2 y y_3 como términos independientes, admite solución. Por otro lado, el sistema homogéneo correspondiente a este sistema del que hablamos es precisamente el que resolveríamos para encontrar una base del subespacio vectorial f. Transformamos el sistema en otro equivalente por el método habitual de aplicar transformaciones elementales sucesivas a su matriz ampliada. En este caso, y a la vista de la matriz A, que tiene rango igual a 2, buscamos obtener a partir de A una matriz A' de esta forma:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & y_1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & y_1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & y_3 - 2y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 - (1/2)F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & y_2/2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & y_3 - 2y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & y_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_1 - y_2 \end{array}\right).$$

Leemos una base del núcleo a partir de la solución del sistema homogéneo correspondiente; ésta es cualquier matriz de la forma:

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R},$$

así que podemos escribir: $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, 3/2, -1, 0) + \mathbb{R}(2, -1/2, 0, -1)$, y una base de $\operatorname{Ker} f$ es: $\big((1, 3/2, -1, 0), (2, -1/2, 0, -1)\big)$. Por otra parte, el sistema original tiene solución si y sólo si es nulo el término $y_3 - 2y_1 - y_2$. Es decir, el vector de componentes y_1, y_2 y y_3 —que es (y_1, y_2, y_3)— pertenece a $\operatorname{Im} f$ si y sólo si verifica: $y_3 - 2y_1 - y_2 = 0$; esta es una ecuación de la imagen de f.

IV.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES

1. Definiciones; notación matricial Consideremos el sistema en $\mathbb{K}$ de n ecuaciones lineales con m incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n, \end{cases} \tag{2}$$

que podemos también expresar de la forma:

$$AX = C, \tag{2'}$$

donde X, C y A son las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

(nótese que X y C son matrices columna de órdenes respectivos $(m, 1)$ y $(n, 1)$, y que A es una matriz de orden (n, m)).

Matrices relacionadas con un sistema

De A diremos es la **matriz asociada** al sistema; de X y C, las matrices de **incógnitas** y de **términos independientes**, respectivamente. Si $C = 0$, del sistema $AX = C$ diremos es un sistema **homogéneo**.

EJEMPLO 1 Consideremos el sistema en $\mathbb{R}$, o **sistema real**, de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{3}$$

La matriz asociada al sistema es la matriz real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto el sistema se puede expresar de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3'}$$

Obsérvese que la igualdad (3') es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y esta igualdad de matrices se verifica precisamente si:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

que es el sistema (3).

De una matriz columna de orden $(m, 1)$ con términos en $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},$$

Solución de un sistema

diremos es una **solución** del sistema (2), o (2′), si verifica:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que si la matriz columna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

es solución del sistema (2′), al hacer en el sistema (2) la sustitución:

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad x_m = \alpha_m,$$

se verifican las n igualdades que resultan.

EJEMPLO 2 El sistema (3′) (cf. ejemplo 1, p. 268) admite como solución la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que al hacer en el sistema (3) la sustitución: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -1$, se verifican las dos igualdades que resultan.

En este capítulo vamos a *resolver* un sistema: $AX = C$, es decir, vamos a estudiar qué condiciones debe verificar para que admita alguna solución, y cuál es el conjunto de soluciones.

Notación Utilizaremos sistemáticamente, a partir de ahora, la notación para las matrices columna y los vectores columna de una matriz que introdujimos en el capítulo III: si A es una matriz cualquiera de orden (n, m) con términos en $\mathbb{K}$, sus matrices columna se denotarán: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, y sus vectores columna (que son de $\mathbb{K}^n$): $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. ▲

2. Aplicación lineal asociada a un sistema Dado un sistema de n ecuaciones con m incógnitas:

$$AX = C, \tag{4}$$

consideremos la aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ canónicamente asociada a la matriz A, es decir:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\quad \mathcal{A} \quad} & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{e}_j & \dashrightarrow & \boldsymbol{a}_j \end{array} \quad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Aplicación lineal asociada a un sistema

De $\mathcal{A}$ diremos es la **aplicación lineal asociada al sistema** (4).

Como $\mathcal{A}$ es la aplicación lineal canónicamente asociada a la matriz A, se tiene:

$$AX = C \iff \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c},$$

donde $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{c}$ son los vectores columna de X y C, respectivamente. Hemos probado, pues, la siguiente

CNS de solución (con la aplicación lineal asociada)

Proposición IV.1 *Una matriz columna X_1 de orden $(m, 1)$ es solución del sistema $AX = C$ si y sólo si:*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c},$$

o en otras palabras: precisamente si la imagen por $\mathcal{A}$ del vector $\boldsymbol{x}_1$ es igual al vector $\boldsymbol{c}$, o equivalentemente: $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{A}^{-1}[\{\boldsymbol{c}\}]$, donde el vector $\boldsymbol{x}_1$ es el vector columna de X_1.

EJEMPLO 3 La aplicación lineal asociada al sistema real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

es la aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ canónicamente asociada a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\mathcal{A}$ es la aplicación lineal tal que:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbb{R}^2 \\
(1,0,0) & \dashrightarrow & (1,-1) = \boldsymbol{a}_1 \\
(0,1,0) & \dashrightarrow & (1,1) = \boldsymbol{a}_2 \\
(0,0,1) & \dashrightarrow & (3,1) = \boldsymbol{a}_3,
\end{array}
$$

y por tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = \mathcal{A}(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) &= x_1\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) + x_3\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_3) \\
&= x_1(1,-1) + x_2(1,1) + x_3(3,1) = (x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + x_3),
\end{aligned}
$$

y en definitiva: $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. Observemos que también podíamos haber llegado a este resultado teniendo en cuenta:

$$
A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.
$$

La matriz columna:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

es solución del sistema, pues: $\mathcal{A}(1,2,0) = (3,1)$.

CNS para que un sistema admita solución

Proposición IV.2 *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones $AX = C$ tenga solución es que el vector $\boldsymbol{c}$ sea combinación lineal de los vectores columna de A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.*

Demostración La condición es necesaria. Si

$$
X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}
$$

es solución de $AX = C$, entonces: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c}$, y por tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{A}(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m) &= \alpha_1\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + \alpha_m\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_m) \\
&= \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{c},
\end{aligned}
$$

y $\boldsymbol{c}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

La condición es suficiente. Si $\boldsymbol{c}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, entonces existen escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ tales que: $\beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \beta_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{c}$, igualdad a partir de la cual podemos escribir: $\mathcal{A}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{c}$, siendo $\boldsymbol{z}$ el vector (de $\mathbb{K}^m$) de componentes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, esto es: $\boldsymbol{z} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$. En consecuencia la matriz columna Z cuyos términos son las componentes de $\boldsymbol{z}$ es solución del sistema $AX = C$. C.Q.D.

CNS para que un sistema admita solución: rango de la matriz del sistema igual a rango de la matriz ampliada

Corolario *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema $AX = C$ admita alguna solución es:*

$$\text{rango}\, A = \text{rango}\left(A \mid C\right),$$

donde $\left(A \mid C\right)$ es la matriz (en notación por columnas):

$$\left(A \mid C\right) = \left(A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_m \mid C\right).$$

Matriz ampliada

De la matriz $\left(A \mid C\right)$ diremos es la **matriz ampliada** del sistema de ecuaciones lineales $AX = C$.

Demostración del corolario La condición es necesaria. Si el sistema de ecuaciones lineales $AX = C$ admite solución, entonces $\boldsymbol{c}$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_m$, y por tanto: $\text{rango}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{c}) = \text{rango}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m)$ (cf. consecuencias de la definición de rango de un sistema de vectores, p. 80), y en consecuencia:

$$\text{rango}\, A = \text{rango}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m) = \text{rango}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{c}) = \text{rango}\left(A \mid C\right).$$

La condición es suficiente. Si se verifica: $\text{rango}\, A = \text{rango}\left(A \mid C\right)$, entonces los rangos $\text{rango}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m)$ y $\text{rango}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{c})$ son iguales, y por tanto $\boldsymbol{c}$ es igual a una combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_m$, pues si no lo fuera, los rangos serían distintos (cf. proposición 1.19, p. 82). En consecuencia, el sistema $AX = C$ tiene solución. C.Q.D.

EJEMPLO 4 El sistema real:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

no admite solución, pues:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \text{rango} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = 3.$$

EJEMPLO 5 El sistema real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \end{cases}$$

admite solución, pues:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rango} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = 2.$$

---

3. *Sistemas equivalentes* De dos sistemas en $\mathbb{K}$ de ecuaciones lineales: $AX = C$ y $BZ = D$, diremos son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Es decir, si X_1 es solución de $AX = C$, también es solución de $BZ = D$; y recíprocamente, si Z_1 es solución de $BZ = D$, también es solución de $AX = C$.

EJEMPLO 6 Los sistemas reales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\; + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\; + x_3 = 0 \end{cases}$$

no son equivalentes, pues la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es solución del segundo, pero no es solución del primero.

Proposición IV.3 *Sea $AX = C$ un sistema en $\mathbb{K}$ de n ecuaciones con m incógnitas. Si T es una matriz cuadrada de orden n, y su rango es igual a n, entonces son equivalentes los siguientes sistemas de n ecuaciones con m incógnitas:*

$$AX = C \quad y \quad (TA)X = TC.$$

Demostración Sea $\mathcal{T}$ la aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$ canónicamente asociada a la matriz T; como T es cuadrada de orden n y de rango n, $\mathcal{T}$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}^n$ (cf. consecuencia de la proposición III.8 (cf. p. 211)). Sea $\mathcal{A}$ la aplicación lineal de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ canónicamente asociada a la matriz A. Recordemos (cf. corolario de la proposición III.7 (cf. p. 201)) que, en estas condiciones, la aplicación lineal canónicamente asociada al producto TA es $\mathcal{T}\circ\mathcal{A}$.

Se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} (X_1 \text{ es solución de } AX = C) &\iff AX_1 = C \\ &\iff \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c} \\ &\iff [\mathcal{T}\circ\mathcal{A}](\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{T}(\boldsymbol{c}) \\ &\iff (TA)X_1 = TC \\ &\iff (X_1 \text{ es solución de } (TA)X = TC). \end{aligned}$$

La tecera equivalencia se justifica de la siguiente forma: por un lado se tiene:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c} \Longrightarrow [\mathcal{T}\circ\mathcal{A}](\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{T}(\boldsymbol{c});$$

y por otro lado, puesto que $\mathcal{T}$ es un isomorfismo, es una aplicación biyectiva y está definida la aplicación inversa de $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}^{-1}$, y

$$[\mathcal{T}\circ\mathcal{A}](\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{T}(\boldsymbol{c}) \Longrightarrow [\mathcal{T}^{-1}\circ\mathcal{T}\circ\mathcal{A}](\boldsymbol{x}_1) = [\mathcal{T}^{-1}\circ\mathcal{T}](\boldsymbol{c}) \Longrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c}.$$

De la cadena de equivalencias anterior se deduce:

$$(X_1 \text{ es solución de } AX = C) \iff (X_1 \text{ es solución de } (TA)X = TC),$$

es decir, los sistemas $AX = C$ y $(TA)X = C$ son equivalentes. c.q.d.

Aplicar a las matrices de un sistema una transformación elemental lleva a otro equivalente

Corolario *Considerando de nuevo el sistema $AX = C$, si A_1 y C_1 son el resultado de aplicar a las matrices A y C, respectivamente, una misma transformación elemental, entonces son equivalentes los sistemas $AX = C$ y $A_1X = C_1$.*

Demostración Sea M la matriz elemental asociada a la transformación elemental. La matriz M es una matriz cuadrada de orden n cuyo rango es igual a n (cf. proposición III.10, p. 216), y se verifica (cf. proposición III.11, p. 217):

$$MA = A_1 \quad \text{y} \quad MC = C_1.$$

De la proposición anterior se deduce que los sistemas $AX = C$ y $(MA)X = MC$, es decir, los sistemas $AX = C$ y $A_1X = C_1$, son equivalentes. c.q.d.

EJEMPLO 7 Consideremos el sistema real:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 = 2, \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y consideremos la transformación elemental consistente en sumar a la primera fila la segunda multiplicada por -2: "$F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$". Apliquemos esta transformación elemental a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resulta muy cómodo trabajar con la matriz ampliada $\left(A \mid C\right)$, pues así podemos aplicar la transformación elemental a las matrices A y C simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Los sistemas:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

son equivalentes.

Sea A una matriz con términos en $\mathbb{K}$ de orden (n, m), de rango igual a $r \geqslant 1$, y tal que sus r primeros vectores columna son linealmente independientes, y sea C una matriz columna con términos en $\mathbb{K}$ de orden $(n, 1)$.

Sabemos (cf. proposición III.12, p. 222) que podemos obtener una matriz A' de la forma:

$$A' = \begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \cdots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \cdots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \cdots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ \quad \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{r}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m-r} \end{array} \tag{5}$$

aplicando a la matriz A transformaciones elementales sucesivas. Sea:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$

la matriz que se obtiene aplicando estas mismas transformaciones elementales a la matriz columna C. Existe (cf. corolario de la proposición III.12 (cf. p. 222)) una matriz T cuadrada de orden n y de rango igual a n tal que: $TA = A'$ y $TC = C'$, y de la proposición IV.3 (cf. p. 273) deducimos son equivalentes los sistemas: $AX = C$ y $A'X = C'$.

Estudiemos en qué condiciones el sistema de ecuaciones $A'X = C'$ tiene solución, es decir, en qué condiciones se verifica la igualdad:

$$\operatorname{rango}\left(A' \mid C'\right) = \operatorname{rango} A' = r.$$

La matriz ampliada $\left(A' \mid C'\right)$ es:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \cdots & a'_{1m} & c'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \cdots & a'_{2m} & c'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \cdots & a'_{rm} & c'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c'_n \end{array}\right) \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-r \end{matrix}.$$

Si $n > r$, se verifica que el rango de $\left(A' \mid C'\right)$ es igual a r si y sólo si los $n - r$ últimos términos de la matriz columna C' son nulos. Si $n = r$, entonces:

$$\left(A' \mid C'\right) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(n+1)} & \dots & a'_{1m} & & c'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(n+1)} & \dots & a'_{2m} & & c'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n(n+1)} & \dots & a'_{nm} & & c'_n \end{array}\right),$$

cuyo rango es $n = r$.

Hemos demostrado, pues, la siguiente

CNS para que un sistema admita solución

Proposición IV.4 *Con las notaciones e hipótesis anteriores, el sistema de ecuaciones $AX = C$ tiene solución precisamente si: $n = r$, o bien $n > r$ y los $n - r$ últimos términos de la matriz columna C' son nulos, es decir: $c'_{r+1} = \dots = c'_n = 0$.*

EJEMPLO 8 Consideremos el sistema real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

y llamemos A a la matriz asociada al sistema y C a la de términos independientes. Apliquemos a las matrices A y C transformaciones elementales sucesivas que nos permitan obtener de A una matriz de la forma (5).

Aplicamos las transformaciones elementales sucesivas a la matriz ampliada $\left(A \mid C\right)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, son equivalentes los sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos finalmente que el sistema tiene solución, ya que se tiene: $n - r = 3 - 2 = 1$, y es nulo el último término de la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

IV.2 RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1. Determinación del núcleo de una aplicación lineal. Resolución de un sistema homogéneo Consideremos una aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$, de matriz asociada A en las bases canónicas. Supongamos que A es una matriz de rango $r \geqslant 1$, y supongamos también que sus r primeros vectores columna son linealmente independientes.

Una matriz columna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

es solución del sistema $AX = O$ si y sólo si el vector columna $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ verifica: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, es decir, pertenece al núcleo de $\mathcal{A}$. Por tanto, el conocimiento de $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ nos lleva al conocimiento del conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = O$, y recíprocamente.

Del teorema de las dimensiones aplicado a nuestro caso, se obtiene:

$$\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = \mathrm{dim}\,\mathbb{K}^m - \mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}) = m - \mathrm{rango}\,\mathcal{A} = m - \mathrm{rango}\,A = m - r.$$

Distingamos dos casos:

- *Primer caso:* $m = r$. Si $m = r$, entonces $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = 0$, de donde: $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\boldsymbol{0}\}$, y la matriz columna nula de orden $(m, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  es la única solución del sistema $AX = O$.

- *Segundo caso:* $m > r$. Supongamos que $m > r$, y por tanto:

$$\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = m - r \geqslant 1.$$

  Podemos obtener una matriz A' de la forma:

$$A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r-1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \dots\quad 0}}_{r}\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)}\quad \dots\quad a'_{1m}}}_{m-r} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\}n-r \\ \vphantom{\underbrace{x}_{r}} \end{array} \tag{6}$$

aplicando sucesivas transformaciones elementales a la matriz A, y es claro que las mismas transformaciones elementales aplicadas a la matriz O dan como resultado la misma matriz O. En consecuencia (cf. sección 1, p. 275), son equivalentes los sistemas $AX = O$ y $A'X = O$. Se verifica que las siguientes $m - r$ matrices columna de orden $(m, 1)$:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} a'_{1(r+1)} \\ a'_{2(r+1)} \\ \vdots \\ a'_{r(r+1)} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} a'_{1(r+2)} \\ a'_{2(r+2)} \\ \vdots \\ a'_{r(r+2)} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix}, \quad \ldots, \quad Z_{m-r} = \begin{pmatrix} a'_{1m} \\ a'_{2m} \\ \vdots \\ a'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix},$$

son soluciones del sistema $A'X = O$, ya que:

$$A'Z_1 = A'Z_2 = \ldots = A'Z_{m-r} = O.$$

En consecuencia, estas matrices columna Z_1, Z_2, ..., Z_{m-r} son soluciones del sistema $AX = O$, y los vectores columna correspondientes: $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, ..., $\boldsymbol{z}_{m-r}$ pertenecen a $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$.

Los vectores $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, ..., $\boldsymbol{z}_{m-r}$ son linealmente independientes. En efecto: de la igualdad $\mu_1\boldsymbol{z}_1 + \mu_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + \mu_{m-r}\boldsymbol{z}_{m-r} = \boldsymbol{0}$, donde μ_1, μ_2, ..., μ_{m-r} son escalares, se deduce que todos éstos son nulos, pues las $m - r$ últimas componentes del vector $\mu_1\boldsymbol{z}_1 + \mu_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + \mu_{m-r}\boldsymbol{z}_{m-r}$, que son: $-\mu_1$, $-\mu_2$, ..., $-\mu_{m-r}$ han de ser todas nulas.

En consecuencia, y dado que $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = m - r$, resulta que el sistema de vectores $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_{m-r})$ es una base de $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$, y por tanto $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^m$ generado por los vectores $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, ..., $\boldsymbol{z}_{m-r}$, es decir: $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = L(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_{m-r})$. El conjunto de soluciones del sistema $AX = O$ es entonces el conjunto de las matrices columna de la forma:

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_{m-r} Z_{m-r},$$

siendo λ_1, λ_2, ..., λ_{m-r} elementos arbitrarios de $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 9 Consideremos la aplicación lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ dada por: $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, x_1 + x_2)$. La matriz asociada a $\mathcal{A}$ en las bases canónicas es la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ y resolvamos el sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

El rango de la matriz A es $r = 2$, y el número de columnas de A es $m = 2$; entonces se tiene: $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A}) = m - r = 2 - 2 = 0$, y por tanto: $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{(0,0)\}$, y la única solución del sistema (7) es la matriz columna nula correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 10 Sea $\mathcal{B}$ la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociada a la matriz real:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontremos $\operatorname{Ker} \mathcal{B}$ y resolvamos el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas $BX = 0$.

El rango de B es $r = 2$, y sus dos primeros vectores columna son linealmente independientes. El número de columnas de B es $m = 4$, y por tanto: $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{B}) = m - r = 4 - 2 = 2$. Apliquemos transformaciones elementales a B hasta obtener una matriz B' de la forma:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b'_{13} & b'_{14} \\ 0 & 1 & b'_{23} & b'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(cf. matriz de (6), p. 277). Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y esta última matriz es de la forma (8):

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b'_{13} & b'_{14} \\ 0 & 1 & b'_{23} & b'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base del núcleo de $\mathcal{B}$ está formada por los vectores: $(b'_{13}, b'_{23}, -1, 0)$ y $(b'_{14}, b'_{24}, 0, -1)$, es decir: $(1,-1,-1,0)$ y $(1,0,0,-1)$. Por tanto: $\operatorname{Ker} \mathcal{B} = L((1,-1,-1,0), (1,0,0,-1))$, y las soluciones del sistema $BX = 0$ son todas las matrices columna de la forma:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con λ_1 y λ_2 números reales.

2. Resolución de un sistema de la forma $AX = C$ Consideremos el sistema en $\mathbb{K}$ de n ecuaciones con m incógnitas $AX = C$. Supondremos que el rango de A es igual a $r \geqslant 1$, y que los r primeros vectores columna de A son linealmente independientes. Sabemos (cf. sección 1, p. 275) que son equivalentes los sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$, siendo:

$$A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} n-r \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\ 0\ \dots\ 0}}_{r}\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)}\ \dots\ a'_{1m}}}_{m-r} \end{array} \quad \text{y} \quad C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el sistema $AX = C$ admite solución, y determinemos una concreta. Sabemos (cf. proposición IV.4, p. 276) que C' ha de ser una matriz columna de orden $(n, 1)$ de la forma:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces se verifica que la siguiente matriz columna de orden $(m, 1)$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}c'_1\\\vdots\\c'_r\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} m-r \end{array}$$

es solución del sistema lineal $A'X = C'$, pues: $A'X_1 = C'$, como se puede fácilmente comprobar. Al ser los sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$ equivalentes, la matriz X_1 también es solución de $AX = C$, es decir: $AX_1 = C$.

Resolvamos ahora el sistema $AX = C$, esto es, encontremos el conjunto de sus soluciones. Se tienen las siguientes equivalencias:

$$AX = C \iff AX = AX_1 \iff A(X - X_1) = O,$$

y por tanto resolver el sistema $AX = C$ en la incógnita X es lo mismo que resolver el sistema $A(X - X_1) = O$ en la incógnita $X - X_1$. Basándonos en lo expuesto en el apartado anterior, distinguimos dos casos:

- *Primer caso:* $m = r$. Si $m = r$, el sistema $A(X - X_1) = O$ tiene solución única:

$$X - X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y la única solución de $AX = C$ es la matriz columna X tal que:

$$X - X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$X = X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix} = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_r \end{pmatrix},$$

ya que en este caso $m - r = 0$.

- *Segundo caso:* $m > r$. Si $m > r$, las soluciones del sistema $A(X - X_1) = O$ en la incógnita $X - X_1$ son, siguiendo la notación del apartado anterior (cf. p. 278), las matrices columna de la forma:

$$X - X_1 = \lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_{m-r} Z_{m-r},$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ elementos de $\mathbb{K}$. En consecuencia, las soluciones del sistema $AX = C$ son las matrices columna de la forma:

$$X = X_1 + \lambda_1 Z_1 + \cdots + \lambda_{m-r} Z_{m-r},$$

es decir:

$$X = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a'_{1(r+1)} \\ a'_{2(r+1)} \\ \vdots \\ a'_{r(r+1)} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a'_{1(r+1)} \\ a'_{2(r+1)} \\ \vdots \\ a'_{r(r+1)} \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix} + \cdots + \lambda_{m-r} \begin{pmatrix} a'_{1m} \\ a'_{2m} \\ \vdots \\ a'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a'_{1m} \\ a'_{2m} \\ \vdots \\ a'_{rm} \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix},$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ elementos de $\mathbb{K}$.

Nota Si el sistema $AX = C$ es de n ecuaciones con n incógnitas, entonces la matriz A es cuadrada de orden n. En este caso, si la matriz A es invertible, entonces el sistema $AX = C$ tiene por única solución la matriz columna $A^{-1}C$.

En efecto. Al ser la matriz A invertible, su rango es igual a n (cf. proposición III.13, p. 227), y obviamente coincide tanto con el número de sus filas como con el número de sus columnas. Por coincidir el rango de A con el número de filas, el sistema $AX = C$ admite alguna solución (cf. proposición IV.4, p. 276); por coincidir con el número de sus columnas, admite a lo más una (cf. p. 281). En definitiva, el sistema $AX = C$ tiene una única solución. Si hacemos: $X_1 = A^{-1}C$, entonces: $AX_1 = AA^{-1}C = C$. Es decir, esta única solución del sistema $AX = C$ es la matriz (columna) $A^{-1}C$. ▲

EJEMPLO 11 Consideremos el sistema real de tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Su matriz asociada, que denotaremos por A, tiene rango $r = 2$, y sus dos primeros vectores columna son linealmente independientes. Sea C la matriz de términos independientes.

Para resolver el sistema considerado, debemos aplicar a la matriz ampliada del sistema sucesivas transformaciones elementales que lleven A a una matriz A' del tipo:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y que llevarán la matriz de términos independientes a:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y por tanto:

$$\left(A' \mid C'\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Al ser la matriz C' de la forma:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se deduce (cf. proposición IV.4, p. 276) que el sistema considerado tiene solución.

Una solución particular del sistema $AX = C$ es:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema vienen determinadas a partir de las matrices columna:

$$\begin{pmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

es decir, a partir de:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto las soluciones del sistema son las matrices columna de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

siendo λ_1 y λ_2 números reales.

EJEMPLO 12 Consideremos el siguiente sistema real de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por A y C sus matrices asociada y de términos independientes, respectivamente. El rango de A es $r = 3$, que es igual al número de sus columnas: $m = 3$.

Para resolver el sistema, apliquemos a su matriz ampliada sucesivas transformaciones elementales que lleven A a una matriz A' del tipo:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y que lleven C a una matriz:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ c'_4 \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones elementales que aplicamos son estas: $F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1$, $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$, $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$ y $F_4 \leftarrow F_4 + F_3$. Obtenemos la matriz:

$$C' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es de la forma:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que (cf. proposición IV.4, p. 276) el sistema $AX = C$ tiene solución. Al ser: $m = r = 3$ la solución del sistema $AX = C$ es única e igual a:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 13 Consideremos el sistema real de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por A y C sus matrices asociada y de términos independientes, respectivamente. La matriz A es cuadrada de orden 3 y su rango es igual a 3, es decir, A es invertible (cf. proposición III.13, p. 227), y por tanto (cf. nota p. 282) la única solución del sistema considerado es $A^{-1}C$. El cálculo de A^{-1} se hizo en el ejemplo 40 del capitulo III (cf. p. 229). Finalmente, la única solución del sistema es:

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hasta ahora hemos tratado sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz asociada, de rango r, tenía la propiedad de ser sus r primeros vectores columna linealmente independientes. En el siguiente ejemplo mostramos la manera de proceder cuando la matriz del sistema no verifica esta propiedad.

EJEMPLO 14 Resolvamos el sistema real de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema (9) es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

y su rango es $r = 2$, pero sus dos primeros vectores columna no son linealmente independientes, mientras que sí lo son el primero y el tercero. Si consideramos las nuevas incógnitas:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2,$$

el sistema (9) se escribe:

$$\begin{cases} y_1 + \ \ y_2 + 2y_3 = 1 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 1, \end{cases} \tag{10}$$

y su matriz asociada es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

la cual tiene rango $r = 2$ y sus dos primeros vectores columna sí son linealmente independientes. Podemos resolver, según los métodos descritos en esta sección, el sistema (10).

Apliquemos a la matriz ampliada del sistema (10) sucesivas transformaciones elementales para llevarla a una matriz de la forma:

$$\left(B' \mid C'\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & b'_{13} & c'_1 \\ 0 & 1 & b'_{23} & c'_2 \end{array}\right).$$

Se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, el número de filas de B es $n = 2$, que coincide con el rango de B, y por tanto (cf. proposición IV.4, p. 276) el sistema (10) tiene solución. Una solución particular del sistema (10) es:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto las soluciones del sistema (10) son las matrices columna de orden (3, 1) de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b'_{13} \\ b'_{23} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir:} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

siendo λ un número real.

Recordando la definición de las incógnitas y_1, y_2, y_3: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$ y $y_3 = x_2$, se concluye que las soluciones del sistema (9) son las matrices columna de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo λ un número real.

IV.3 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Ecuaciones de un subespacio vectorial Empezamos con un ejemplo. Consideremos los vectores $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,1,1)$ y $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^4$, y el subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ que generan: $F = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = L((1,0,1,1),(1,1,1,1))$.

Queremos caracterizar los vectores $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^4$ que pertenecen a F; en concreto, dado un vector $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$, buscamos condiciones sobre y_1, y_2, y_3 y y_4 que permitan determinar si $\boldsymbol{y}$ pertenece o no al subespacio vectorial F.

Por definición de F, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ pertenece a F si y sólo si es combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$. Si A es la matriz real de orden $(4,2)$ cuyos dos vectores columna son los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y si Y es la siguiente matriz columna de orden $(4,1)$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

entonces (cf. proposición IV.2, p. 271) $\boldsymbol{y}$ pertenece a $F = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ precisamente si tiene solución el sistema $AX = Y$, de cuatro ecuaciones con dos incógnitas.

Estudiemos, pues, en qué condiciones el sistema $AX = Y$ tiene solución. Apliquemos sucesivas transformaciones elementales a la matriz ampliada del sistema, es decir, a $\left(A \mid Y\right)$, donde se observa que A es de rango igual a 2. Se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \\ 1 & 1 & y_4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 \\ 1 & 1 & y_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & y_4 - y_1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & y_4 - y_1 \end{array}\right),$$

y entonces el sistema $AX = Y$ tiene solución precisamente si (cf. proposición IV.4, p. 276): $y_3 - y_1 = 0$ y $y_4 - y_1 = 0$.

En consecuencia, el vector (y_1, y_2, y_3, y_4) pertenece a F si y sólo si sus componentes verifican las igualdades:

$$\begin{cases} y_3 - y_1 = 0, \\ y_4 - y_1 = 0, \end{cases}$$

de las que diremos son *ecuaciones* del subespacio vectorial F. Podemos escribir:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 - x_1 = 0,\ x_4 - x_1 = 0\}.$$

Vistas las ecuaciones anteriores, que determinan el subespacio vectorial F, es fácil comprobar, por ejemplo, que $(1,2,1,1) \in F$ y $(1,1,2,2) \notin F$.

EJEMPLO 15 Sea $\mathcal{A}$ la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada en las bases canónicas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinemos unas ecuaciones de $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Sabemos (cf. sección 3 del capítulo II, p. 119) que el subespacio vectorial $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ está generado por las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es decir, está generado por los vectores columna de la matriz A:

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = L((1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,0),(0,2,0)).$$

El rango del sistema $((1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,0),(0,2,0))$ es igual a 2, y como los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ son linealmente independientes, se tiene:

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = L((1,0,1),(0,1,0)).$$

De esta forma, un vector (y_1, y_2, y_3) pertenece al subespacio vectorial $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ si y sólo si tiene solución el siguiente sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Considerando la matriz ampliada de este sistema, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 \end{array}\right),$$

y por tanto (cf. proposición IV.4, p. 276) el sistema tiene solución si y sólo si: $y_3 - y_1 = 0$, que es, en consecuencia, una ecuación de $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

En conclusión: $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - x_1 = 0\}$.

Nota Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son m vectores de $\mathbb{K}^n$ de rango igual a n, el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ que generan es el propio $\mathbb{K}^n$: $L(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \mathbb{K}^n$. Una ecuación del subespacio vectorial $L(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, es decir, una ecuación de $\mathbb{K}^n$, sería: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, o dicho de otra forma: $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0\}$. En la práctica, el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ no se representa mediante ecuaciones. ▲

2. ***Expresión de un vector como combinación lineal de otros vectores*** Dados m vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ de $\mathbb{K}^n$, y un vector $\boldsymbol{c}$ del subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ generado por ellos, nuestra intención es encontrar escalares $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tales que:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{c}.$$

En los ejemplos siguientes vemos la forma de proceder.

EJEMPLO 16 Dada la base $B = ((1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$, determinemos las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ en la base B, esto es, encontremos los tres únicos números reales x_1, x_2 y x_3 tales que:

$$x_1(1,-1,0) + x_2(0,1,-1) + x_3(0,0,1) = (1,-2,0).$$

Esta igualdad es equivalente a: $(x_1, -x_1 + x_2, -x_2 + x_3) = (1,-2,0)$, o bien:

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ -x_1 + x_2 & = -2 \\ \quad - x_2 + x_3 & = 0, \end{cases}$$

que escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Nota bene Nótese que Los vectores columna de la matriz asociada a este sistema son los vectores de la base B. ▲

Resolvamos el sistema (11). Considerando su matriz ampliada, se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

De los resultados vistos en el apartado sobre resolución de un sistema de ecuaciones de la forma $AX = C$ (cf. sección 2, p. 277) se deduce que la única solución del sistema (11) es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ de $\mathbb{R}^3$ en la base B son: 1, -1 y -1.

Efectivamente se comprueba: $1(1,-1,0) - 1(0,1,-1) - 1(0,0,1) = (1,-2,0)$.

EJEMPLO 17 Dados los vectores $(0,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$, expresemos el vector $(2,3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de ellos, es decir, encontremos números reales x_1, x_2 y x_3 tales que:

$$x_1(0,1) + x_2(1,-1) + x_3(1,0) = (2,3).$$

Procediendo análogamente a como se ha hecho en el ejemplo anterior, debemos resolver el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

cuya matriz asociada tiene por vectores columna los tres vectores dados: $(0,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$. Esta matriz tiene rango igual a 2, y sus dos primeros vectores columna son linealmente independientes. Considerando la matriz ampliada, se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Por tanto (cf. segundo apartado de la sección 2), las soluciones del sistema (12) son las matrices columna de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Haciendo, por ejemplo, $\lambda = 0$, obtenemos una solución particular del sistema (12):

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia el vector $(2,3)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $(0,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$ de la forma: $(2,3) = 5(0,1) + 2(1,-1) + 0(1,0)$.

Tomando, por ejemplo, $\lambda = 3$, obtenemos otra expresión de $(2,3)$ como combinación lineal de los vectores dados: $(2,3) = 8(0,1) + 5(1,-1) - 3(1,0)$.

Escolio En este ejemplo vemos que el vector $(2,3)$ se puede expresar de varias formas como combinación lineal de $(0,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$. Esto es consecuencia de que el sistema formado por ellos: $((0,1),(1,-1),(1,0))$, es ligado. ▲

3. Calculo de una base de un subespacio vectorial dado por unas ecuaciones

Consideremos el subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases} \tag{13}$$

y determinemos una base de F.

Se verifica que (13) es equivalente al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por A la matriz asociada a este sistema, y sea $\mathcal{A}$ la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociada a la matriz A. Entonces (cf. primer apartado de la sección 2) un vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ pertenece a F si y sólo si: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, y en consecuencia: $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = F$.

La matriz A tiene rango 2 y sus dos primeros vectores columna son linealmente independientes. Con las transformaciones elementales $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$ y $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$, aplicadas sucesivamente a la matriz A, obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto (cf. primer apartado de la sección 2), una base de $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, es decir, una base de F, es el sistema: $((-3, 2, -1, 0), (2, -1, 0, -1))$, y en conclusión:

$$F = L((-3, 2, -1, 0), (2, -1, 0, -1)).$$

EJEMPLO 18 Si el subespacio vectorial considerado, dado por unas ecuaciones, fuera $\{\mathbf{0}\}$, entonces no tendría base.

Consideremos el subespacio vectorial G de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Para determinar una base de G, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero la matriz asociada a este sistema tiene tres columnas y su rango es igual a 3, y por tanto (cf. primer apartado de la sección 2) tiene por única solución la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el único vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes verifican las ecuaciones de (14) es $(0, 0, 0)$, y por consiguiente: $G = \{(0, 0, 0)\}$, que no tiene base.

4. Ejemplo de intersección de subespacios vectoriales Consideremos estos dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$: $F = L((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$ y $G = L((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0))$. Hallemos una base de su intersección, esto es, del subespacio vectorial: $F \cap G$.

En primer lugar, calculemos unas ecuaciones del subespacio vectorial F. Estudiemos, pues, bajo qué condiciones tiene solución el sistema real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

cuya matriz asociada tiene rango 2. Aplicando sucesivamente a su matriz ampliada las transformaciones elementales $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$, $F_2 \leftrightarrow F_3$ y $F_4 \leftarrow F_4 + F_2$, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & y_3 + y_4 \end{array}\right),$$

y por tanto unas ecuaciones de F son:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0, \\ y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

En segundo lugar, encontremos unas ecuaciones de G. Aplicando sucesivamente a la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right)$$

las transformaciones elementales $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$ y $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$, se obtiene la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right),$$

y por tanto, una ecuación de G es: $y_4 = 0$.

Un vector (y_1, y_2, y_3, y_4) de $\mathbb{R}^4$ pertenece a $F \cap G$ precisamente si sus componentes verifican simultáneamente las tres ecuaciones obtenidas: las dos de F y la de G, es decir:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0, \\ y_3 + y_4 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

En consecuencia, las igualdades de (15) son unas ecuaciones de $F \cap G$.

Finalmente, determinemos, a partir de (15), una base de $F \cap G$. Para ello, debemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

La matriz asociada a este sistema tiene rango 3, pero sus tres primeros vectores columna no son linealmente independientes; sí lo son, sin embargo, el primero, el tercero y el cuarto. Si consideramos las nuevas incógnitas:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_4, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = y_2,$$

el sistema (16) se escribe de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

y la matriz asociada a este nuevo sistema, que sigue teniendo rango 3, sí verifica que sus tres primeros vectores columna son linealmente independientes. Aplicando sucesivamente a esta matriz las transformaciones elementales $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, $F_3 \leftarrow -F_3$ y $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$, obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las matrices columna que son solución del sistema (17) son las de la forma

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y las que son solución del sistema (16) son las de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, los vectores (y_1, y_2, y_3, y_4) de $F \cap G$ son aquellos de la forma:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \lambda(1, -1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

es decir: $F \cap G = L((1, -1, 0, 0)) = \mathbb{R}(1, -1, 0, 0)$, y una base de $F \cap G$ es: $((1, -1, 0, 0))$.

RECAPITULACIÓN IV

Definiciones y propiedades Consideramos un sistema en $\mathbb{K}$ de n ecuaciones con las m incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \, ; \end{cases}$$

- El sistema se escribe de la forma: $AX = C$, donde:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ (\textbf{matriz de incógnitas})},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ (\textbf{matriz de términos independientes})},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ (\textbf{matriz asociada} al sistema)}.$$

- **Aplicación lineal asociada** al sistema: la aplicación lineal $\mathcal{A}$ canónicamente asociada a A.
- **Matriz ampliada** del sistema: la que tiene por matrices columna las matrices columna de A y C.
  Se denota: $\left(A \mid C\right)$.
- **Solución** de un sistema: matriz columna X_1 con términos en $\mathbb{K}$ de orden $(m, 1)$ tal que: $AX_1 = C$.
  Si los vectores columna de A, X_1 y C son $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{c}$, respectivamente: X_1 es solución del sistema precisamente si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones:
  - $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{c}$, o bien: $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{A}^{-1}[\{\boldsymbol{c}\}]$;
  - el vector $\boldsymbol{c}$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$;
  - $\operatorname{rango}\left(A \mid C\right) = \operatorname{rango} A$.
- **Sistemas equivalentes**: sistemas que tienen el mismo conjunto de soluciones.
  Si T es una matriz cuadrada de orden n y rango n, entonces son equivalentes los sistemas $AX = C$ y $(TA)X = TC$.

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales Consideramos un sistema en $\mathbb{K}$, $AX = C$, de n ecuaciones con m incógnitas, que verifica: rango $A = r \geqslant 1$ y los r primeros vectores columna de A son linealmente independientes; sea:

$$C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$

el resultado de aplicar a C las mismas transformaciones elementales que llevan A a una matriz A' de la forma:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(r-1)} & \dots & a'_{rm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r}\;\underbrace{\hphantom{a'_{1(r+1)} \quad \dots \quad a'_{1m}}}_{m-r} \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-r \\ \\ \end{array} \quad :$$

- Los sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$ son equivalentes.
- El sistema $AX = C$ tiene solución precisamente si: $n = r$, o bien $n > r$ y los $(n - r)$ últimos términos de C' son nulos.
- Cuando el sistema $AX = C$ tiene solución:
  - ◇ si $m = r$, la solución es única: $X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{pmatrix}$;
  - ◇ si $m > r$, las soluciones son las matrices columna de la forma:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-r \end{array} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a'_{1(r+1)} \\ a'_{2(r+1)} \\ \vdots \\ a'_{r(r+1)} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-r \end{array} + \dots + \lambda_{m-r} \begin{pmatrix} a'_{1m} \\ a'_{2m} \\ \vdots \\ a'_{rm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-r \end{array},$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-r}$ elementos de $\mathbb{K}$.

Capítulo V

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

ESQUEMA - RESUMEN

INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números reales Antes de presentar las sucesiones de números reales, es importante estudiar algunos aspectos del conjunto de los números reales; a ello se dedica esta sección.

Las tres primeras propiedades que se citan ya han sido utilizadas, al menos implícitamente. *El conjunto de los números reales, dotado de las operaciones adición y multiplicación, tiene estructura de cuerpo conmutativo, y en él está definida la relación de orden total $\leqslant$, la cual es compatible con estas operaciones.* Este aserto nos da sintéticamente mucha información, relacionada con tareas habituales de manipulación de números reales, expresiones algebraicas, igualdades y desigualdades. Entre otras muchas cosas, nos dice, por ejemplo, que el orden de los sumandos no altera una suma (propiedad conmutativa de la adición), que el producto de cualquier número por el número 1 tiene como resultado el número original (elemento neutro de la multiplicación), que podemos extraer fuera de un paréntesis un factor común (propiedad distributiva), o que podemos multiplicar por un mismo número positivo ambos miembros de una desigualdad sin que cambie su sentido (compatibilidad de la relación de orden con la multiplicación).[1]

La cuarta propiedad es la realmente nueva para el lector. Para verla, se hace necesario introducir el concepto de conjunto acotado, superior o inferiormente, y para ver este concepto debemos hablar de cota superior y de cota inferior de un conjunto. Una *cota superior* de un conjunto de números reales es un número que es mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el número 0 es cota superior del conjunto de los números reales negativos, o el número 1 lo es del conjunto cuyos elementos son las fracciones de la forma $1/n$ para cada número n natural positivo (este conjunto está formado por $1/1 = 1, 1/2, 1/3, \ldots$). Análogamente, una *cota inferior* de un conjunto de números reales es un número que es menor o igual que todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el número 0 es cota inferior del conjunto de los números reales positivos, o del conjunto de las fracciones de la forma $1/n$ para $n \in \mathbb{N}^*$.[2] Si un conjunto admite alguna cota superior, se dice que está *acotado superiormente*; si admite alguna cota inferior, que está *acotado inferiormente*. Y si admite cotas de ambos tipos, se dice simplemente que está (o es) *acotado*. Por ejemplo, el conjunto de los números reales negativos está acotado superiormente, pero no inferiormente (no hay ningún número que sea menor o igual que todos los números negativos simultáneamente); el conjunto de los números positivos está acotado inferiormente, pero no superiormente; y el conjunto de las fracciones $1/n$ con $n \in \mathbb{N}^*$

[1] El significado completo de lo que es un cuerpo, o una relación de orden total, puede verse en el apéndice A.

[2] Con $\mathbb{N}^*$ se designa el conjunto de los números naturales positivos: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

está acotado tanto superior como inferiormente, con lo que es un conjunto acotado (el único que está acotado en los tres ejemplos citados).

Nota bene El conjunto vacío: $\emptyset$, se considera acotado. ▲

Ya podemos enunciar la cuarta propiedad: si un conjunto no vacío está acotado superiormente, es decir, si admite alguna cota superior, entonces existe un número con la característica de ser la menor de todas sus cotas superiores. Tal número se denomina *supremo* del conjunto; si el conjunto se denota por A, su supremo se designa: $\sup A$. Por ejemplo, el conjunto de los números reales negativos está acotado superiormente: ¿cuál es su supremo? Ya hemos apuntado que el número 0 es una cota superior de este conjunto, y acontece que cualquier número menor que 0 no es cota superior;[3] en otras palabras: el número 0 es la menor de sus cotas superiores. Si denotamos el conjunto por G, podemos escribir: $\sup G = 0$.

Esta cuarta propiedad tiene una segunda parte: lo análogo con los conjuntos acotados inferiormente. Si un conjunto no vacío está acotado inferiormente, entonces existe un número con la propiedad de ser la mayor de todas sus cotas inferiores. Tal número se denomina *ínfimo* del conjunto; si el conjunto se denota por A, su ínfimo se designa: $\text{ínf} A$. Por ejemplo, para el conjunto de los números reales positivos —que suele denotarse por $\mathbb{R}_+^*$—, se tiene: $\text{ínf} \mathbb{R}_+^* = 0$. Y si A es el conjunto de las fracciones $1/n$ para $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene: $\text{ínf} A = 0$ y $\sup A = 1$.

Hablamos también de máximo y de mínimo de un conjunto. Se dice que un número es *máximo* de un conjunto si es cota superior del conjunto y pertenece al conjunto; y la definición de *mínimo* es análoga. El máximo de un conjunto A, si existe, es único, y se denota: $\text{máx} A$; y lo mismo el mínimo, que se denota: $\text{mín} A$. Por ejemplo, el conjunto A de las fracciones $1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, admite máximo: la fracción $1/1 = 1$, pues es cota superior de A y, a la vez, es un elemento de A; podemos entonces escribir: $\text{máx} A = 1$. Es de observar que si un conjunto admite máximo, éste coincide con su supremo; y, análogamente, si un conjunto admite mínimo, éste coincide con su ínfimo. Por ejemplo, el conjunto A de fracciones recién citado no admite mínimo (si así fuera, el mínimo sería igual a $\text{ínf} A = 0$, pero $0 \notin A$); el conjunto G de los números negativos no admite máximo (pues $\sup G = 0$, y $0 \notin G$) ni mínimo (pues no está acotado inferiormente); y el conjunto $\mathbb{R}_+^*$ tampoco admite máximo ni mínimo.

Si un conjunto no está acotado superiormente, también se habla de supremo: se dice que su supremo es *más infinito*. Y si un conjunto no está acotado inferiormente, se dice que su ínfimo es *menos infinito*. Para los conjuntos de los que venimos hablando, podemos escribir: $\text{ínf} G = -\infty$ y $\sup \mathbb{R}_+^* = +\infty$.

---

[3]Nótese que, si b es un número menor que 0, no puede ser mayor o igual que todos los números negativos: verbigracia, sería menor que el número negativo $b/2$.

Hay una consecuencia de la cuarta propiedad de los números reales que interesa reseñar aquí: la *propiedad arquimediana* de los números reales. De acuerdo con ella, si x y y son dos números reales, positivo el primero, y positivo o nulo el segundo, entonces existe algún número natural m tal que $mx > y$. Piénsese que el primer número puede ser escogido muy pequeño y el segundo muy grande; la propiedad arquimediana nos asegura que existe algún número natural cuyo producto por el primero supera el segundo. Una consecuencia útil de esta propiedad es que no importa cuán pequeño sea escogido un número positivo x: será posible encontrar algún número natural positivo m de forma que la fracción $1/m$ sea aún menor que x.

Un *intervalo de números reales* es un conjunto de números reales que o bien coincide con el conjunto vacío, o bien coincide con el propio $\mathbb{R}$, o bien es de uno de los ocho tipos escritos en el texto. Los cuatro primeros de estos ocho tipos: $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ y (a,b), son conjuntos formados por todos los números comprendidos entre dos dados, y los cuatro se distinguen entre sí según se considere si cada uno de esos dos dados pertenece o no al conjunto (nótese que se escribe un corchete: '[' o ']', en el primer caso, y un paréntesis: '(' o ')', en el segundo). Por ejemplo, el intervalo $(1/2, 8]$ es el conjunto de los números reales comprendidos entre $1/2$ y 8, excluyendo $1/2$ e incluyendo 8. Los otros cuatro tipos de intervalos: $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$, están formados simplemente por los números reales mayores, mayores o iguales, menores, o menores o iguales, respectivamente, que uno dado. Por ejemplo, el intervalo $(-3,+\infty)$ está formado por los números mayores que -3 (excluyendo éste); el intervalo $(-\infty,0]$, por los menores o iguales que 0 (incluyendo éste).

Queremos enfatizar que los intervalos del tipo $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) y $\emptyset$ son conjuntos acotados. Cada uno de los cuatro primeros tiene por ínfimo el número a, y por supremo el número b; y estos ínfimo y supremo serán mínimo o máximo, respectivamente, según pertenezcan o no al intervalo. Los otros cinco tipos de intervalos no son conjuntos acotados, pero los intervalos $(a,+\infty)$ y $[a,+\infty)$ están acotados inferiormente, y su ínfimo es a; y los intervalos $(-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$ lo están superiormente, y su supremo es b.

El *valor absoluto* de un número real es el propio número si el número es positivo o nulo, y es su opuesto si el número es negativo. Se designa colocando el número entre barras. Por ejemplo: $|7| = 7$, $|0| = 0$, o $|-3| = -(-3) = 3$. En el texto se incluyen varias propiedades del valor absoluto; se hará amplia aplicación de ellas en las demostraciones relativas a límites de sucesiones.[4]

Esta sección termina presentando los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados. Lo primero que observamos es que hablaremos de *punto* del mismo modo que

[4] Y sobre todo serán aplicadas en las siguientes asignaturas de Matemáticas del Grado.

hablamos de número real. Ello es debido a que los números reales se pueden representar en una recta donde se han elegido un origen y una unidad orientada de medida.[5] El primer concepto que se estudia es el de punto interior de un conjunto. Un punto x es *punto interior* de un conjunto A de números reales (o, más simplemente, es interior a A) si podemos encontrar un intervalo del tipo (a, b) con dos características: el punto pertenece a este intervalo: $x \in (a, b)$, y este intervalo está contenido en el conjunto: $(a, b) \subseteq A$. Una consecuencia inmediata es que un punto interior de un conjunto es un elemento del conjunto. En el texto se recogen varios ejemplos, y se enuncian algunas propiedades, pero entre unos y otras nos interesa resaltar lo que fundamentalmente manejaremos en el curso sobre este concepto: cómo son los puntos interiores de los intervalos. Los intervalos $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ y (a, b) tienen los mismos puntos interiores: los puntos comprendidos entre a y b, excluyendo a y b; los intervalos $(a, +\infty)$ y $[a, +\infty)$ también tienen los mismos puntos interiores: en este caso, los números mayores que a (excluyendo por tanto el propio a); análogamente, los intervalos $(-\infty, b)$ y $(-\infty, b]$ tienen por puntos interiores los números menores que b (excluyendo, pues, el mismo b); y, finalmente, para el intervalo $\mathbb{R}$, todos sus puntos son interiores, y para el conjunto vacío no hay puntos interiores.

Dado un conjunto, el conjunto formado por sus puntos interiores se denomina *interior* del conjunto. Si A es el conjunto, su interior se denota de esta forma: $\mathring{A}$. Nótese que $\mathring{A} \subseteq A$, pues los puntos interiores de un conjunto son elementos del conjunto. En el texto se recoge una tabla con el interior para cada uno de los diez tipos de intervalo. Sobre esto no nos hará falta más.

Que un conjunto de números reales es *abierto* significa que todos sus puntos son interiores. Es decir, un conjunto abierto es el que coincide con su interior. Los intervalos que son conjuntos abiertos son (a, b), $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$, además de $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío. Y que un conjunto es *cerrado* significa que su complementario es abierto. Los intervalos que son conjuntos cerrados son $[a, b]$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$, y también $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío. Nótese que estos dos últimos son conjuntos abiertos y cerrados a la vez; acontece que son los únicos conjuntos de números reales que son abiertos y cerrados a la vez. Sobre conjuntos cerrados diremos algo más cuando hablemos de punto adherente, después de estudiar los límites de sucesiones.

Nota bene Hay conjuntos que no son abiertos y que tampoco son cerrados. Entre los intervalos, los de la forma $(a, b]$ y $[a, b)$ no son abiertos y no son cerrados. ▲

[5] Un ejemplo de la estrecha relación entre puntos de una recta y números reales es el siguiente: si a y b son dos números, el valor absoluto de su diferencia: $|a - b|$, es una forma de hacer referencia a lo que dista entre los puntos que están representando ambos números, sin preocuparse de tener que saber de antemano cuál es mayor. Verbigracia: $|(-1) - 3| = |-4| = 4$, y 4 es lo que distan los puntos que representan los números -1 y 3. Este tipo de representación en una recta debería ser conocido de Bachillerato (o del Curso de Acceso); no obstante, no se exige en este curso.

Sucesiones de números reales Formalmente, una *sucesión de números reales* es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales. Cuando tenemos una sucesión, tenemos entonces una forma de asignar un número real al número natural 0, un número real al número natural 1, un número real al número natural 2, y así sucesivamente; es decir, tenemos una forma de construir una lista de números reales en la que es relevante el lugar que ocupa cada uno. Por ejemplo, a partir de la aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número natural n asigna el número n^2, podemos contruir esta lista de números: $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$, pues $0^2 = 0$ es la imagen de 0 por la aplicación, $1^2 = 1$ es la imagen de 1, $2^2 = 4$ es la imagen de 2, y así sucesivamente.

Para las sucesiones no se usa la notación habitual de las aplicaciones. Se elige una letra, por ejemplo a (o b, o c, etc.), y se le añade como subíndice un número natural para indicar la imagen por la aplicación de ese número natural; de esta forma, con a_0 se designa la imagen por la aplicación del número natural 0, con a_1 la imagen del número natural $1, \ldots$, y en general con a_n la imagen de un número natural n. Así, podemos decir que la sucesión es:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

y cuando nos queramos referir a la sucesión como a un todo, escribiremos:

$$(a_n; n \in \mathbb{N}), \quad \text{o más simplemente:} \quad (a_n).$$

En el ejemplo del párrafo anterior, podemos decir que esa sucesión es $(n^2; n \in \mathbb{N})$, o simplemente: (n^2); o incluso: (a_n), con $a_n = n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dada una sucesión (a_n), y dado un número natural k, se dice que el *término de orden k* de la sucesión es igual a a_k; es decir, el término de orden k de la sucesión es la imagen por la aplicación del número natural k. Para la sucesión (n^2), su término de orden k es igual a k^2; verbigracia, el término de orden 5 es igual a $5^2 = 25$. Otro ejemplo: si (b_n) es la sucesión tal que $b_n = (-1)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión $1, -1, 1, -1, \ldots$, podemos decir que su término de orden k es igual a 1 si k es par, y a -1 si k es impar.

Una *cota superior* de una sucesión es un número que es mayor o igual que todos y cada uno de sus términos; y, análogamente, una *cota inferior* es un número que es menor o igual que todos y cada uno de sus términos. Por ejemplo, para la sucesión $((-1)^n)$, una cota superior es el número 1 y una cota inferior es el número -1; para la sucesión (n^2), una cota inferior es el número 0, y no admite cotas superiores. Una sucesión está *acotada superiormente* o *inferiormente* si admite una cota superior o inferior, respectivamente; y está *acotada* si lo está tanto superior como inferiormente. De las dos sucesiones que acabemos de poner como ejemplo, sólo la sucesión $((-1)^n)$ está acotada.

El último concepto que se estudia en esta sección es el de subsucesión. Intuitivamente, una subsucesión es una sucesión obtenida a partir de otra: si en una sucesión dada, nos deshacemos de algunos términos (en cantidad finita o infinita), de forma que dejemos una cantidad infinita de términos de la sucesión original, lo que queda es una sucesión de la que se dice es *subsucesión* de la primera. En el texto podemos leer la definición formal general, pero veamos aquí las dos formas de obtener una subsucesión (y denotarla) que manejaremos en el resto del capítulo.

Si (a_n) es una sucesión: a_0, a_1, a_2, a_3, …, y nos deshacemos, pongamos, de sus tres primeros términos, nos queda: a_3, a_4, a_5, …, que resulta ser también una sucesión; se trata de una *subsucesión* de la sucesión original (a_n), y se denota: $(a_n; n \geqslant 3)$. Por ejemplo, la sucesión $(n^2; n \geqslant 5)$ es una subsucesión de la sucesión (n^2); compárese la sucesión: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, …, con la subsucesión: 25, 36, 49, …

Otra forma de obtener una subsucesión de una sucesión la sugiere este ejemplo. Si (a_n) es una sucesión, y nos fijamos sólo en sus términos de orden par: a_0, a_2, a_4, a_6, …, lo que acabamos de escribir es otra sucesión, que es *subsucesión* de la sucesión original (a_n); se denota: (a_{2n}). Verbigracia, para la sucesion $((-1)^n)$, su subsucesión $((-1)^{2n})$ es la sucesión *constante* (1): 1, 1, 1, … (todos sus términos iguales a 1). De manera similar podríamos hablar también, por ejemplo, de la subsucesión de la sucesión (a_n) formada por los términos de orden impar: (a_{2n+1}).

Para finalizar esta sección, una cuestión de notación. Dado un número natural k, a veces escribiremos: $(a_n; n \geqslant k)$, sin habernos referido antes a alguna sucesión (a_n) que es posible que ni siquiera esté definida. Tal notación hace referencia a la sucesión cuyo término de orden n es a_{n+k}; es decir: a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, … Por ejemplo, la sucesión $(1/n; n \geqslant 1)$ es esta: 1, 1/2, 1/3, 1/4, …; y nótese que no podemos hablar de la sucesión (a_n) con $a_n = 1/n$, pues no tendría sentido su término de orden 0.

Sucesiones convergentes. Límites infinitos Empecemos con un ejemplo: la sucesión de números reales $(1/n; n \geqslant 1)$ *converge* al número real 0; o dicho de otra forma: el número 0 es *límite* de la sucesión $(1/n; n \geqslant 1)$. ¿Qué significa esto? La sucesión es:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

y sus términos son números que se hacen cada vez más pequeños; realmente, segun avanzamos en el orden de la sucesión, los términos correspondientes se acercan al número 0 tanto como queramos. Por ejemplo, si quisiéramos, siempre con términos de la sucesión, acercarnos a 0 menos de una milésima, sólo tendríamos que seleccionar los términos de orden mayor o igual que 1001: todos ellos estarían en el intervalo $(0 - 1/1000, 0 + 1/1000)$, lo cual es lo mismo que decir que distarian de 0 menos de una milésima. Y esto lo podríamos hacer con otra medida cualquiera. Realmente, dado cualquier ϵ positivo, existirá algún orden k (el cual dependerá, en general, de ϵ) de forma que en el intervalo $(0-\epsilon, 0+\epsilon)$ podemos encontrar todos los términos de la sucesión que son de orden mayor o igual que k. Esto es justamente lo que queremos decir cuando afirmamos que la sucesión $(1/n; n \geqslant 1)$ converge al número real 0, o que el número 0 es límite de la sucesión $(1/n; n \geqslant 1)$.

Otro ejemplo: la sucesión $(n/(n+1))$ converge al número 1. A la vista de sus primeros términos: 0, 1/2, 2/3, 3/4, ..., quizá no se aprecia si los términos de la sucesión se acercan a algún número concreto, pero si nos fijamos en términos de orden mayor, digamos, orden mayor o igual que 100:

$$\frac{100}{101}, \frac{101}{102}, \frac{102}{103}, \dots,$$

sí parece que nos podemos acercar, tanto como queramos, al número 1. Puede comprobarse que esto efectivamente es así: la sucesión $(n/(n+1))$ converge al número 1.

De una sucesión se dice es *convergente* si converge a algún número real. De las propiedades de las sucesiones convergentes que figuran en el texto, hay dos que queremos destacar aquí. La primera es que el límite es único; es decir, si una sucesión es convergente, entonces no converge más que a un único número. Si (a_n) es la sucesión convergente, y l es su (único) límite, se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \quad \text{o bien} \quad \lim\,(a_n) = l.$$

De acuerdo con los ejemplos anteriores, podemos escribir:

$$\lim\left(\frac{1}{n}; n \geqslant 1\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1.$$

La segunda propiedad que destacamos es que el límite de una sucesión convergente no depende de sus primeros términos. Formalmente, esto significa que una sucesión (a_n) converge a un número l si y sólo si cualquier subsucesión suya de la forma $(a_n; n \geqslant k)$ converge también al número l.

El siguiente concepto que vemos en esta sección es el de límite más infinito. Intuitivamente, una sucesión *tiende a más infinito* si, según se avanza en el orden de la sucesión, los términos correspondientes se hacen tan grandes como se quiera. Por ejemplo, la sucesión (n^2) tiende a más infinito. Fijemos un número b cualquiera; podemos encontrar algún orden k tal que todos los términos de la sucesión de orden mayor o igual que k son mayores que b. En efecto: si b es negativo, se toma $k = 0$, y si b es positivo, basta tomar como k el primer número natural que supera $\sqrt{b}$; el término de orden k, que es k^2, y todos los que le siguen: $(k+1)^2$, $(k+2)^2$, ..., son entonces mayores que b. Si una sucesión (a_n) tiende a más infinito, se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{o bien} \quad \lim\,(a_n) = +\infty.$$

Se tiene entonces: $\lim n^2 = +\infty$.

Y una sucesión *tiende a menos infinito* si, según se avanza en el orden de la sucesión, los términos correspondientes se hacen tan grandes como se quiera en valor absoluto, pero siendo negativos. Por ejemplo, la sucesión $(-n)$ tiende a menos infinito. Si fijamos un número b arbitrario, podemos encontrar algún orden k tal que todos los términos de orden mayor o igual que k son menores que b. Efectivamente: si b es positivo, tomamos $k = 0$, y si b es negativo, tomamos k igual al primer número natural que supera $-b$; conseguimos así que todos los términos de orden mayor o igual que k: $-k, -(k+1), -(k+2), \ldots$, sean menores que b. Si una sucesión (a_n) tiende a menos infinito, escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \text{o bien} \quad \lim\,(a_n) = -\infty.$$

De acuerdo con lo visto, podemos escribir: $\lim\,(-n) = -\infty$.

Los límites infinitos también cumplen las dos propiedades que destacábamos para las sucesiones convergentes: la unicidad del límite y el hecho de que el límite no depende de los primeros términos de la sucesión.

En lo que al cálculo efectivo de límites se refiere, lo primero que vemos es el cálculo del límite de sucesiones del tipo $(P(n))$, donde $P(n)$ es un polinomio. Son sucesiones como $(1-n^4)$, $(2n^3+n)$ o $(1+5n^2-3n)$. Sobre polinomios, conviene repasar el apéndice A (cf. p. 413),[6] pero recordamos que el *grado* de un polinomio es el mayor exponente de n que figura, y que el *coeficiente de mayor grado* es el número que acompaña a esta n: el grado de $1-n^4$ es 4 y su coeficiente de mayor grado es -1; el grado de $2n^3+n$ es 3 y su coeficiente de mayor grado es 2; el grado de $1+5n^2-3n$ es 2 y el coeficiente de mayor grado es 5 (el grado del polinomio 5 —un número real es un caso particular de polinomio— sería 0, y el coeficiente de mayor grado de este polinomio sería el mismo número 5). Con esto en cuenta, el límite de la sucesión $(P(n))$, cuando $P(n)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 1, es igual a $+\infty$ o a $-\infty$ según sea el coeficiente de mayor grado positivo o negativo, respectivamente. Así:

$$\lim\,(1-n^4) = -\infty, \quad \lim\,(2n^3+n) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim\,(1+5n^2-3n) = +\infty.$$

(Si el polinomio tiene grado 0, es decir, si se reduce a un número real, la sucesión $(P(n))$ es una sucesión constante, y su límite es trivial; por ejemplo: $\lim\,(5) = 5$.)

El siguiente tipo de límites que distinguimos es el de sucesiones del tipo $(1/P(n))$, donde $P(n)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 1. En todos estos casos el límite es igual a 0; por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-n^5+2n^4-n+2} = 0, \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^3+\pi n^5} = 0.$$

[6] En el apéndice citado, los polinomios se presentan en la indeterminada x; por ejemplo: $8x^5+\sqrt{2}x-1$, x^2+1, o $3-x+x^3$. Lo que allí se dice es válido aquí sin más que cambiar x por n.

Nota bene No está definido el cociente $1/(1-n^2)$ cuando $n = 1$, así que, propiamente, deberíamos escribir: $\lim(1/(1-n^2); n \geqslant 2) = 0$; sin embargo, en virtud de que el límite (sea finito o infinito) es único y no depende de los primeros términos de la sucesión, y con el fin de no recargar la notación, escribiremos simplemente $\lim(1/(1-n^2)) = 0$. Análogo comentario podríamos hacer con los otros límites. En general, si $(b_n; n \geqslant k)$ es una sucesión que admite límite, finito o infinito, no designaremos éste por $\lim(b_n; n \geqslant k)$, sino por $\lim(b_n)$, aunque b_n no esté definido par algún valor de n menor que k. ▲

Y finalmente también calculamos el límite de sucesiones definidas por cocientes de polinomios, del tipo: $(P(n)/Q(n))$, donde $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grado mayor o igual que 1. Debemos distinguir tres casos, según sea el grado del polinomio del numerador mayor, igual o menor que el del denominador. En el primer caso: cuando el grado del numerador es mayor, el límite es más infinito o menos infinito, según sean iguales o distintos, respectivamente, los signos de los coeficientes de mayor grado de ambos polinomios. Por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n^4}{5n^2+n} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n^5}{8n^4-6n/5} = +\infty, \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2}{-2n+6} = +\infty.$$

(Para el primero, verbigracia, el polinomio del numerador es de grado 4 y su coeficiente de mayor grado es -1, y el polinomio del denominador es de grado 2 y su coeficiente de mayor grado es 5; el grado del numerador es mayor, y ambos coeficientes tienen distinto signo, así que el límite del cociente es $-\infty$.) En el segundo caso: los grados de numerador y denominador iguales, el límite es igual al cociente de los coeficientes de mayor grado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n^2+n-1} = -1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+n^2}{8n^3-2n-\sqrt{3}} = \frac{5}{8}, \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{-10n+9} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}.$$

Y en el tercer caso: el grado del denominador mayor, el límite es igual a 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{2n^4+n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+n^2}{8n^8-2n} = 0, \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+1}{n^3-2n^2+3n+1} = 0.$$

En el manual *Problemas Resueltos*, puede encontrar el lector límites de más tipos de sucesiones.

Esta sección termina con el concepto de punto adherente. Un *punto adherente* de un conjunto de números reales no vacío es un punto que es límite de alguna sucesión de puntos del conjunto. Es decir: si A es un conjunto y a es un punto, este punto es punto adherente de A (o simplemente: es adherente a A) si existe alguna sucesión (x_n) con límite a y con todos sus términos puntos de A: $\lim(x_n) = a$, y $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$. Nótese que un punto del propio conjunto es adherente al conjunto: si $a \in A$, la sucesión constante (a) converge obviamente al punto a y sus términos son puntos de A. Una propiedad interesante que se prueba en el texto es esta: de un conjunto no vacío acotado superiormente, su supremo es punto adherente; y, análogamente, de un conjunto no vacío acotado inferiormente, su ínfimo es punto adherente. De esta forma, dado el intervalo $(1,2)$, por ejemplo, son adherentes a él, además de sus propios puntos, los puntos 1 y 2 (su ínfimo y su supremo, respectivamente); o dado el conjunto $\mathbb{R}_+^*$ —que es en definitiva el intervalo $(0,+\infty)$— son adherentes a él todos sus puntos y el punto 0 (su ínfimo). Estos ejemplos muestran que hay conjuntos que admiten puntos adherentes que no pertenecen al conjunto.

Finalmente, se define la *adherencia* de un conjunto no vacío como el conjunto formado por sus puntos adherentes. Si A designa el conjunto, su adherencia se denota así: $\overline{A}$. Como todo punto del propio conjunto es adherente al conjunto, se tiene: $A \subseteq \overline{A}$. Nos interesa resaltar una propiedad: un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su adherencia; una consecuencia de ello es que el límite de cualquier sucesión convergente de puntos de un conjunto cerrado es un punto del propio conjunto. En lo que al aspecto del cálculo práctico se refiere, notar que, para calcular la adherencia de un intervalo, no hay más que "añadir" su supremo y su ínfimo, caso de que alguno de ellos, o los dos, no pertenezca ya al intervalo. Así, la adherencia de los intervalos $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ y (a,b) es $[a,b]$; la de $(a,+\infty)$ y $[a,+\infty)$ es $[a,+\infty)$; la de $(-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$ es $(-\infty,b]$; y la de $\mathbb{R}$ es el mismo $\mathbb{R}$. Sobre el conjunto vacío, se conviene en que su adherencia es el propio conjunto vacío: $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Sucesiones monotonas Una sucesión *creciente* es una sucesión que verifica que cada término es menor o igual que el siguiente. Es decir, una sucesión (a_n) es creciente si verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_{n+1}$. Una sucesión es *decreciente* si cada término es mayor o igual que el siguiente: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant a_{n+1}$. Y en ambos casos se añade el adverbio *estrictamente* si los términos consecutivos no son iguales, esto es: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$, o $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$. Finalmente, una sucesión es *monotona* si es creciente o decreciente.

Para saber si una sucesión (a_n) es creciente o decreciente, podemos calcular la diferencia entre un término y su anterior, digamos: $a_{n+1} - a_n$, y ver si es positiva o negativa para cada n: el primer caso corresponde a sucesión creciente, y el segundo a decreciente. Por ejemplo, se puede comprobar así que la sucesión $(1/n; n \geqslant 1)$ es decreciente, incluso estrictamente, pues:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n},$$

y $-1/((n+1)n)$ es negativo para cada $n \geqslant 1$ (al haberlo obtenido negativo, y no simplemente menor o igual que 0, podemos concluir que la sucesión es estrictamente decreciente). Otra cosa que se puede hacer, al menos cuando la sucesión tiene sus términos positivos, es estudiar si el cociente a_{n+1}/a_n es mayor que 1 para cada n (creciente) o menor que 1 para cada n (decreciente). Por ejemplo, la sucesión $(\sqrt{n}; n \geqslant 1)$ es estrictamente creciente, pues:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

y como $(n+1)/n$ es mayor que 1 para cada $n \geqslant 1$, lo mismo verifica su raíz cuadrada. Otro ejemplo: la sucesión[7] $(2^n/n!; n \geqslant 2)$ es estrictamente decreciente, ya que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1},$$

y $2/(n+1)$ es menor que 1 para cada $n \geqslant 2$.

Un resultado importante sobre las sucesiones monótonas es este: dada una sucesión creciente, si está acotada superiormente, entonces es convergente, y si no lo está, entonces tiende a más infinito. De la misma manera, dada una sucesión decreciente, si está acotada inferiormente, entonces es convergente, y si no lo está, entonces tiende a menos infinito. Vemos así que todas las sucesiones monótonas admiten límite, finito o infinito.

En el texto se estudia ampliamente la llamada *sucesión geométrica de razón* q, donde q es un número real no nulo. Se trata de la sucesión (q^n), es decir:

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots$$

Sus propiedades se resumen de esta manera: si $0 < |q| < 1$ (o lo que es lo mismo: si $-1 < q < 1$), entonces $\lim (q^n) = 0$; si $q = 1$, entonces la sucesión es constante: (1) (y por tanto con límite 1); si $q > 1$, entonces $\lim (q^n) = +\infty$; y si $q \leqslant -1$, entonces la sucesión no admite límite (ni finito ni infinito).

Series de números reales Sea (a_n) una sucesión de números reales. La *serie* de números reales *asociada* a la sucesión (a_n), o como también se dice: la serie de *término general* a_n, es esta sucesión:

$$a_0,\quad a_0 + a_1,\quad a_0 + a_1 + a_2,\quad \ldots,\quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n,\quad \ldots$$

Es decir: la serie asociada a la sucesión (a_n), o la serie de término general a_n, es la sucesión (S_n) con $S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$.

Por ejemplo, la serie asociada a la sucesión (n), o la serie de término general n, es la sucesión (S_n) donde:

$$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[7] Sobre la notación $n!$, véase la nota al pie en p. 347.

(esta última igualdad es fácil de comprobar.) Otro ejemplo: la serie asociada a la sucesión geométrica de razón q (recuérdese que $q \neq 0$) es la sucesión (T_n) donde:

$$T_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Esta serie se denomina *serie geométrica de razón q*.

Se dice que una serie es *convergente*, y de *suma* el número real S, cuando, como sucesión, es convergente y su límite es S. Es decir, la serie (S_n) asociada a la sucesión (a_n) es convergente de suma S si $\lim (S_n) = S$, esto es:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=0}^{n} a_p = S.$$

Y se dice que una serie es *divergente* si no es convergente. Para estudiar el *carácter* de una serie, esto es, para estudiar si la serie es convergente o divergente, son útiles los llamados *criterios de convergencia*, los cuales no son más que condiciones suficientes de convergencia o divergencia de una serie a partir de cálculos con la sucesión a la que está asociada. En el texto se presentan dos: el de D'ALEMBERT y el de CAUCHY.[8]

Para una serie de término general a_n, donde cada a_n es no nulo, el criterio de D'ALEMBERT nos pide que calculemos, si existe, el límite de $(|a_{n+1}/a_n|)$: la serie es convergente o divergente según sea este límite menor o mayor que 1, respectivamente. Por ejemplo, la serie asociada a la sucesión $(2^n/n!; n \geqslant 2)$ es convergente porque:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

y este último número es menor que 1. Y para una serie de término general a_n (donde ya no exigimos que cada a_n sea no nulo), el criterio de CAUCHY nos pide que calculemos, si existe, el límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$: también acontece que la serie es convergente o divergente según sea este límite menor o mayor que 1, respectivamente. Por ejemplo, la serie de término general $(n^n/(2n+1)^n)$ es convergente, pues:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nota En ambos criterios, si el límite correspondiente existe y es igual a 1, nada podemos deducir de la convergencia o divergencia de la serie. ▲

---

[8] En muchos libros se denominan *criterio del cociente* y *criterio de la raíz*, respectivamente. El motivo de esta nomenclatura saltará a la vista inmediatamente.

Para finalizar, comentamos que en el texto se estudia con detalle la serie geométrica de razón q. Su carácter (convergencia o divergencia) depende crucialmente del valor de q. Si la razón q está comprendida entre -1 y 1, es decir, si $-1 < q < 1$, entonces la serie geométrica es convergente y de suma $1/(1-q)$; esto se escribe así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

En caso contrario, esto es, si $q \leqslant -1$ o si $q \geqslant 1$, entonces la serie geométrica es divergente.

V.1 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

1. Propiedades de los números reales Suponemos que el lector está familiarizado, desde sus estudios de secundaria, con los números naturales, enteros y racionales, y en alguna medida con los reales. De estos últimos, en este apartado recogemos sus propiedades más importantes. Algunas de ellas ya han sido citadas (o al menos implícitamente manejadas) en el presente texto, como las dos primeras.

Propiedad 1 (cuerpo conmutativo) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, dotado de las operaciones adición y multiplicación, tiene estructura de *cuerpo conmutativo*:[9] $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. El número 0 es el elemento neutro de la adición; el *opuesto* de un número real x es el número $-x$; el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación; y el *inverso* de un número real x no nulo ($x \neq 0$) es $1/x$.

Propiedad 2 (relación de orden) La relación '$\leqslant$' (que se lee "menor o igual que") es una relación de *orden total*[10] en $\mathbb{R}$. Es decir, verifica:

a) $\leqslant$ es reflexiva: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$,
b) $\leqslant$ es antisimétrica: $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ y } y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$,
c) $\leqslant$ es transitiva: $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ y } y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$,
d) y además: $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ o } y \leqslant x)$.

Nota Si x y y son dos números reales, la negación de $x \leqslant y$ se escribe: $y < x$ (y es "menor que" x). También haremos uso de las relaciones '$\geqslant$' ("mayor o igual que") y '$>$' ("mayor que"). ▲

Propiedad 3 (compatibilidad entre la relación de orden y las operaciones) La relación de orden total $\leqslant$ es compatible con la adición y la multiplicación del cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Esto es, para cada terna (x, y, z) de números reales se verifica:

a) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$,
b) $(x \leqslant y \text{ y } z \geqslant 0) \implies (xz \leqslant yz)$.

De esta propiedad se infieren las siguientes consecuencias:

(C1) $(x \leqslant y \quad \text{y} \quad x' \leqslant y') \implies (x + x' \leqslant y + y')$;
(C2) $(x \leqslant y) \implies (-y \leqslant -x)$;
(C3) $(x \leqslant y \quad \text{y} \quad x' < y') \implies (x + x' < y + y')$;
(C4) $(x < y \quad \text{y} \quad z > 0) \implies (xz < yz)$;
(C5) $(x < y) \implies \left(x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$.

EJERCICIO 1 *Demostrar las consecuencias anteriores de la propiedad 3 de los números reales.* ▲

[9] Cf. apéndice A, p. 407.
[10] Cf. apéndice A, p. 390.

Conjuntos acotados Consideremos un conjunto A de números reales (esto es, un subconjunto A del conjunto $\mathbb{R}$: $A \subseteq \mathbb{R}$).

Conjunto acotado superiormente

Del conjunto A diremos está **acotado superiormente** si existe algún número real b que es mayor o igual que cada uno de sus elementos; es decir, si se verifica:

$$\forall x \in A,\ x \leqslant b.$$

Cota superior

En este caso, del número b diremos es una **cota superior** del conjunto A, o también que el conjunto A está acotado superiormente por b.

Conjunto acotado inferiormente

Del conjunto A diremos está **acotado inferiormente** si existe algún número real a que es menor o igual que cada uno de sus elementos; esto es, si se verifica:

$$\forall x \in A,\ a \leqslant x;$$

Cota inferior

Y en este caso de a diremos es una **cota inferior** del conjunto A, o también que el conjunto A está acotado inferiormente por a.

Conjunto acotado

Finalmente, del conjunto A diremos está (o es) **acotado** si está acotado tanto superior como inferiormente.

Nota bene De la definición se deduce que cualquier número real es, simultáneamente, una cota superior y una cota inferior del conjunto vacío: $\emptyset$; por tanto, el conjunto vacío está acotado. ▲

Máximo de un conjunto

De un número real b diremos es **máximo** del conjunto A (de números reales), y escribiremos: $b = \text{máx}\, A$, si b es una cota superior de A y además $b \in A$. Si un conjunto admite máximo, éste es único.

Mínimo de un conjunto

Análogamente se define el **mínimo** de un conjunto, que se escribe: $\text{mín}\, A$; es decir, afirmar que $a = \text{mín}\, A$ significa que el número a es una cota inferior de A y que $a \in A$. También acontece que el mínimo de un conjunto, si existe, es único.

EJEMPLO 1

El conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z}$, no tiene máximo y no tiene mínimo; el conjunto de los números enteros negativos: $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, tiene máximo: $\text{máx}(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) = -1$, pero no tiene mínimo; el conjunto de los números naturales: $\mathbb{N}$, no tiene máximo y sí tiene mínimo: $\text{mín}\, \mathbb{N} = 0$; el conjunto $A = \{1, -1, 0\}$ tiene máximo y mínimo: $\text{máx}\, A = 1$ y $\text{mín}\, A = -1$. Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene máximo y tiene mínimo.

Propiedad 4 (supremo e ínfimo) Para todo conjunto no vacío A de números reales que esté acotado superiormente, existe un único número real, que se denota: $\sup A$

Supremo de un conjunto

("**supremo** de A"), que verifica:

$$\begin{cases} \sup A \text{ es una cota superior de } A \\ \quad \text{y} \\ \sup A \text{ es menor o igual que cualquier otra cota superior de } A. \end{cases}$$

El supremo de un conjunto es entonces el mínimo de sus cotas superiores, o su cota superior mínima. En símbolos:

$$(\forall\, x \in A,\ x \leqslant b) \iff (\sup A \leqslant b).$$

Asimismo, para todo conjunto no vacío A de números reales que esté acotado inferiormente, existe un único número real, que se denota: $\inf A$ ("**ínfimo** de A"), que verifica:

Ínfimo de un conjunto

$$\begin{cases} \inf A \text{ es una cota inferior de } A \\ \quad \text{y} \\ \inf A \text{ es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de } A. \end{cases}$$

El ínfimo de un conjunto es, pues, el máximo de sus cotas inferiores, o su cota inferior máxima. En símbolos:

$$(\forall\, x \in A,\ a \leqslant x) \iff (a \leqslant \inf A).$$

EJEMPLO 2 En el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, el número 4 es una cota superior, pues para cualquier elemento x de B se verifica: $x < 4$; sin embargo, este número no es el supremo de B (por ejemplo, el número π también es cota superior del conjunto B y es menor que 4). El supremo de B, esto es, el mínimo de sus cotas superiores, es igual a 2: $\sup B = 2$.

Propiedades del supremo y del ínfimo Dado un conjunto A no vacío de números reales, se verifica:

- *Si A está acotado superiormente, entonces*

$$\begin{cases} \sup A \textit{ es una cota superior de } A \\ \quad \textit{y} \\ \textit{todo número real menor que } \sup A \textit{ no es una cota superior de } A. \end{cases}$$

- *Si A está acotado inferiormente, entonces:*

$$\begin{cases} \inf A \textit{ es una cota inferior de } A \\ \quad \textit{y} \\ \textit{todo número real mayor que } \inf A \textit{ no es una cota inferior de } A. \end{cases}$$

- *Si A está acotado superiormente, entonces:*

$$\forall\, x \in A,\ (x < \sup A) \Longrightarrow (\exists\, y \in A,\ x < y \leqslant \sup A)\,.$$

En efecto, si $x < \sup A$, entonces x no es una cota superior de A, y podemos escribir: $\exists\, y \in A,\ x < y \leqslant \sup A$.

- *Si A está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces:* $\sup A = \max A$.
- *Si A está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces:* $\inf A = \min A$.

Proposición V.1 *Si $x > 0$, el conjunto no vacío $X = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente.*

Demostración Haremos la demostración por reducción al absurdo: supongamos que el conjunto X está acotado superiormente, con lo cual admite un supremo (propiedad 4); pongamos: $s = \sup X$.

Como $x > 0$, se tiene que $s + x > s$, de donde: $s > s - x$, y en consecuencia el número $s - x$ no es cota superior de X. Existe, pues, un número natural m tal que $s - x < mx$, o bien:

$$s < mx + x. \tag{1}$$

Pero $mx + x = (m+1)x$, con lo que el número $mx + x$ es un elemento de X, y (1) contradice que s sea el supremo de X.

En conclusión, X no está acotado superiormente. C.Q.D.

Propiedad arquimediana

Corolario *Si $y \geqslant 0$ y $x > 0$, existe un número natural m tal que: $mx > y$. Y si $x > 0$, existe un número natural positivo m tal que: $\dfrac{1}{m} < x$.*

EJEMPLO 3 El conjunto

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

es no vacío, y está acotado superiormente (por ejemplo, por el número 2) e inferiormente (por ejemplo, por el número 0, pues todos sus elementos son números positivos); por tanto, admite supremo y admite ínfimo.

Es claro que el número 1 es supremo del conjunto A; como es un elemento de A, es su máximo: $\sup A = \max A = 1$.

El número 0 es el ínfimo del conjunto A. En efecto: este número es cota inferior de A, y es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de A. Para ver esto último, notemos que si $s > 0$, entonces existe un número natural positivo m tal que $s > 1/m$; al ser $1/m$ un elemento de A, esto establece que s no puede ser una cota inferior de A. Se tiene entonces: $\inf A = 0$. Nótese que, como $0 \notin A$, este número no es el mínimo del conjunto A.

Supremos e ínfimos de conjuntos no acotados Si un conjunto de números reales A no está acotado superiormente, es decir, si verifica:

$$\forall\, b \in \mathbb{R},\ b \text{ no es una cota superior de } A,$$

Supremo más infinito

o lo que es lo mismo: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in A,\ x > b$, entonces escribiremos:

$$\sup A = +\infty,$$

que leeremos: "el supremo de A es más infinito". Y si el conjunto A no está acotado inferiormente, *mutatis mutandis*, escribiremos:

$$\inf A = -\infty,$$

ínfimo más infinito

que leeremos: "el ínfimo de A es menos infinito".

2. Intervalos de números reales Dados dos números reales a y b, con $a \leqslant b$, se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},\\
[a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}, & (a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, & (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}$$

Intervalo de números reales

De un conjunto de números reales diremos es un **intervalo de números reales** si coincide con $\mathbb{R}$, con el conjunto vacío: $\emptyset$, o con alguno de los ocho tipos de conjuntos anteriores.

Nota bene Si $a = b$, los intervalos (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ se reducen al conjunto vacío. ▲

EJEMPLO 4 El conjunto $(6,7)$ es el de los números reales que son, simultáneamente, mayores que 6 y menores que 7: $(6,7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 7\}$. La expresión $(7,6)$ no representa ningún intervalo de $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 5 El conjunto $\{a\}$, donde $a \in \mathbb{R}$, es un intervalo de números reales, pues: $\{a\} = [a,a]$.

Nota En lo sucesivo en este capítulo, cuando escribamos (a,b) nos estaremos refiriendo al intervalo, no al par de números reales, a menos que se especifique otra cosa. Cuando queramos referirnos al par (a,b), por ejemplo escribiremos: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (o más en general: $(a,b) \in C$ donde C será algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$). ▲

EJERCICIO 2 *Demostrar que* $\sup(a,b) = b$ *y que* $\sup(a,b] = b$. ▲

Nota bene Del ejercicio 2 se deduce que $\sup(-\infty,b) = \sup(-\infty,b] = b$. ▲

EJERCICIO 3 *Sea* A *un intervalo no vacío de números reales acotado superiormente. Demostrar que también es un intervalo el conjunto* $A \cup \{\sup A\}$. ▲

EJEMPLO 6 Los intervalos que son conjuntos acotados (o **intervalos acotados**) son:

Intervalos acotados

$$[a,b], \quad (a,b], \quad [a,b), \quad (a,b) \quad \text{y} \quad \emptyset.$$

Por el contrario, los intervalos $(-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$ sólo están acotados superiormente; $(a,+\infty)$ y $[a,+\infty)$, sólo inferiormente; y $\mathbb{R}$, ni inferior ni superiormente.

3. Valor absoluto de un número real Dado un número real x, se define el

Valor absoluto

valor absoluto de x, y se denota: $|x|$, de la forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 7 Se tiene:

$$|-3| = 3, \quad |0| = 0 \quad \text{y} \quad |0.1| = 0.1.$$

Consecuencias de la definición de valor absoluto De la definición de valor absoluto se deducen de forma sencilla las siguientes propiedades, verificadas por cualquier número real z:[11]

- $|z| = |-z| \geqslant 0$;
- $-|z| \leqslant z \leqslant |z|$;
- $|z| \leqslant b \iff -b \leqslant z \leqslant b \iff z \in [-b,b]$, *con* $b \geqslant 0$;
  $|z| < b \iff -b < z < b \iff z \in (-b,b)$, *con* $b > 0$;
- $|z-a| \leqslant \epsilon \iff z \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, *con* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\epsilon \geqslant 0$;
  $|z-a| < \epsilon \iff z \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, *con* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\epsilon > 0$;
- $|z| = a \iff (z = a \quad o \quad z = -a)$, *con* $a > 0$;
  $|z| = 0 \iff z = 0$.

[11] Aquí no recogemos una demostración de estas propiedades; puede encontrarse en los *Problemas Resueltos*.

Más propiedades del valor absoluto

Proposición V.2 *Si x y y son dos números reales, se verifica:*
a) $|xy| = |x|\,|y|$;
b) ***(desigualdad triangular)***: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
c) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

Demostración La prueba del primer apartado es inmediata sin más que considerar los distintos casos posibles: $x \geqslant 0$, $x < 0$, $y \geqslant 0$, $y < 0$.

Para el segundo apartado, notemos que podemos escribir (cf. segunda consecuencia de la definición de valor absoluto): $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ y $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$, de donde:

$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

y en consecuencia (cf. tercera consecuencia de la definición, con $b = |x| + |y|$ y $z = x + y$):

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Para el tercer apartado, y de acuerdo con lo demostrado en el segundo, podemos escribir: $|x| = |y + (x-y)| \leqslant |y| + |x-y|$, de donde:

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|; \qquad (2)$$

por otro lado: $|y| = |x + (y-x)| \leqslant |x| + |y-x|$, y como $|y-x| = |x-y|$:

$$|y| - |x| \leqslant |x-y|. \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce: $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$, de lo que se concluye (cf. tercera consecuencia, con $b = |x-y|$ y $z = |x| - |y|$) el resultado: $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$. C.Q.D.

Nota Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n números reales, por recurrencia se demuestra:

$$|x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1|\,|x_2| \cdots |x_n| \quad \text{y} \quad |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

▲

EJERCICIO 4 *Demostrar que si x y y son dos números reales, entonces:*

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

▲

4. Punto interior. Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados Teniendo en cuenta la correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta —cuando en ésta se han fijado un origen y una unidad orientada—, emplearemos indistintamente los términos **punto** y número real.

Punto

Punto interior

Punto interior Dado un conjunto A de números reales, de un punto x diremos es **punto interior** del conjunto A (o **interior** a A) si existe un intervalo de la forma (a, b) tal que:

$$x \in (a, b) \quad \text{y} \quad (a, b) \subseteq A.$$

De esta definición se deducen las siguientes consecuencias:

- *Todos los puntos del intervalo* (a, b) *son puntos interiores de* (a, b).
  En efecto, si $x \in (a, b)$, entonces: $x \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq (a, b)$, lo que establece que x es punto interior de (a, b).
- *Todo número real es punto interior del conjunto* $\mathbb{R}$.
- *Si* x *es punto interior de un conjunto* A, *entonces* $x \in A$. *Si* $x \notin A$, *entonces* x *no puede ser punto interior de* A.
- *Dado* $a \in \mathbb{R}$, *el punto* a *no es interior del conjunto* $\{a\}$.

EJEMPLO 8 El punto 3 es interior al conjunto $(1, 5]$. Para demostrarlo, debemos encontrar un intervalo (a, b) tal que: $3 \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq (1, 5]$. Podemos tomar como intervalo (a, b), por ejemplo, el intervalo $(1, 5)$, pues: $3 \in (1, 5)$ y $(1, 5) \subseteq (1, 5]$.

El punto 1 no es un punto interior del conjunto $(1, 5]$, pues $1 \notin (1, 5]$.

El punto 5 no es interior a $(1, 5]$. En efecto. Si (a, b) fuera un intervalo tal que $5 \in (a, b)$, entonces existiría $s \in (a, b)$ tal que $s > 5$; pero entonces s no sería un elemento de $(1, 5]$, y (a, b) no podría estar contenido en $(1, 5]$. Al no existir ningún (a, b) tal que $5 \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq (1, 5]$, el punto 5 no puede ser interior a $(1, 5]$.

Análogamente se demostraría que un punto a y un punto b no son interiores, respectivamente, a $[a, b)$ y a $(a, b]$, y que a su vez ninguno de ellos es interior a $[a, b]$.

EJEMPLO 9 Todos los puntos del intervalo $(a, +\infty)$ son interiores a él. En efecto: si c es un punto arbitrario de $(a, +\infty)$, y tomamos $b > c$, entonces: $c \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq (a, +\infty)$, y c es punto interior de $(a, +\infty)$.

Análogamente se demostraría que todos los puntos del intervalo $(-\infty, b)$ son interiores.

Interior de un conjunto

Interior de un conjunto Dado un conjunto A de números reales, del conjunto de sus puntos interiores, que representaremos por $\mathring{A}$, diremos es el **interior** del conjunto A:

$$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto interior de } A\}.$$

De la definición de interior de un conjunto se deducen las siguientes consecuencias, que se verifican dados dos conjuntos de números reales A y B y dados dos números reales a y b tales que $a < b$:

- *El interior del conjunto* (a, b) *es* (a, b). *En símbolos:* $\overset{\circ}{\widehat{(a, b)}} = (a, b)$.
  Pues, como sabemos, todo punto de (a, b) es interior a (a, b).

- $\mathring{A} \subseteq A$.

  Ya que todo punto interior de A es a su vez un elemento de A.
- *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.*

  En efecto: si $x \in \mathring{A}$, entonces existe un intervalo (a,b) tal que: $x \in (a,b) \subseteq A \subseteq B$, y por tanto $x \in \mathring{B}$.
- $\overset{\circ}{\widehat{(a,+\infty)}} = (a,+\infty)$ y $\overset{\circ}{\widehat{(-\infty,b)}} = (-\infty,b)$.

  Es una consecuencia inmediata de lo visto en el ejemplo 9 (cf. p. 317).

EJEMPLO 10 En el siguiente cuadro se muestran todas las formas de los intervalos de números reales y sus correspondientes interiores.

Intervalo	Interior
$[a,b]$, $a \neq b$	(a,b)
$[a,a] = \{a\}$	$\emptyset$
$(a,b]$	(a,b)
$[a,b)$	(a,b)
(a,b)	(a,b)
$(-\infty,b)$	$(-\infty,b)$
$(-\infty,b]$	$(-\infty,b)$
$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)$
$[a,+\infty)$	$(a,+\infty)$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\emptyset$	$\emptyset$

CUADRO 1: El interior de los intervalos.

De acuerdo con lo dicho hasta hora, sólo resta por demostrar los siguientes casos:

- $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = (a,b)$. Como $(a,b) \subset [a,b]$, entonces (cf. segunda consecuencia de la definición de interior de un conjunto):

$$(a,b) = \overset{\circ}{\widehat{(a,b)}} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{[a,b]}},$$

  y como a y b no son puntos interiores a $[a,b]$ (cf. ejemplo 8, p. 317), se concluye el resultado. De manera similar se probaría para los intervalos $(a,b]$ y $[a,b)$.
- $\overset{\circ}{\widehat{[a,+\infty)}} = (a,+\infty)$. Como $(a,+\infty) \subset [a,+\infty)$ y $\overset{\circ}{\widehat{(a,+\infty)}} = (a,+\infty)$, entonces:

$$(a,+\infty) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{[a,+\infty)}},$$

  y se tiene el resultado dado que a no es interior a $[a,+\infty)$. Análogamente se demostraría para el intervalo $(-\infty,b]$.

Conjunto abierto

Conjuntos abiertos De un conjunto A de números reales diremos es **abierto** si todos sus puntos son interiores a él, es decir, si $A \subseteq \mathring{A}$.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades, que se tienen para un conjunto A de números reales:

- *El conjunto $\mathring{A}$ es abierto.*

  Podemos escribir:

  $$x \in \mathring{A} \implies \text{existe } (a,b) \text{ tal que: } x \in (a,b) \text{ y } (a,b) \subseteq A;$$

  pero de que $(a,b) \subseteq A$ se deduce: $(a,b) = \overset{\circ}{\widehat{(a,b)}} \subseteq \mathring{A}$, con lo que podemos escribir:

  $$x \in \mathring{A} \implies \text{existe } (a,b) \text{ tal que: } x \in (a,b) \text{ y } (a,b) \subseteq \mathring{A},$$

  que es lo mismo que decir que todo punto de $\mathring{A}$ es interior a $\mathring{A}$; en consecuencia, $\mathring{A}$ es abierto.

- *Una condición necesaria y suficiente para que A sea abierto es: $A = \mathring{A}$.*

  En efecto, si A es abierto, es decir: $A \subseteq \mathring{A}$, teniendo en cuenta que $\mathring{A} \subseteq A$, se deduce que $A = \mathring{A}$. Y, recíprocamente, si $A = \mathring{A}$, entonces A es abierto (consecuencia anterior).

EJEMPLO 11 — Intervalos abiertos

Los intervalos que son conjuntos abiertos (o **intervalos abiertos**) son aquellos que coinciden con su interior, es decir (cf. cuadro de la p. 318):

$$(a,b), \quad (-\infty,b), \quad (a,+\infty), \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \emptyset.$$

Proposición V.3 *La unión arbitraria de conjuntos abiertos tiene como resultado un conjunto abierto.*

Demostración Si I es un conjunto y, para cada $i \in I$, el conjunto A_i es abierto, debemos probar que es abierto el conjunto A definido por:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Si $x \in A$, entonces existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$, y por ser A_i abierto: $x \in \mathring{A}_i$; por otro lado, como $A_i \subseteq A$, se tiene: $\mathring{A}_i \subseteq \mathring{A}$, y como $x \in \mathring{A}_i$, se infiere: $x \in \mathring{A}$. En consecuencia: $A \subseteq \mathring{A}$, lo que establece que A es abierto. c.q.d.

Proposición V.4 *La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n conjuntos abiertos, debemos demostrar que el conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ también es abierto.

Si $A = \emptyset$, se tiene el resultado, pues el conjunto vacío es abierto. Si $A \neq \emptyset$, sea x un punto de A. Como cada A_i es abierto, existe un intervalo abierto (a_i, b_i) tal que:

$$x \in (a_i, b_i) \quad \text{y} \quad (a_i, b_i) \subseteq A_i;$$

definiendo: $a = \text{máx}\,\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $b = \text{mín}\,\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, podemos escribir:

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i \leqslant a < x < b \leqslant b_i,$$

y así: $x \in (a, b) \subseteq A$, y por tanto: $x \in \mathring{A}$. En consecuencia, $A \subseteq \mathring{A}$, y A es abierto. c.q.d.

Nota La intersección no finita de conjuntos abiertos de números reales no es necesariamente un conjunto abierto. ▲

EJERCICIO 5 *Sea A un conjunto de números reales abierto y no vacío. Demostrar que si A está acotado superiormente, entonces* $\sup A \notin A$. *También, demostrar que si A está acotado inferiormente, entonces* $\inf A \notin A$. ▲

Conjunto cerrado

Conjuntos cerrados De un conjunto C de números reales diremos es **cerrado** si su complementario: $C^c = \mathbb{R} - C$, es un conjunto abierto.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

- *Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son, a la vez, abiertos y cerrados.*
  En efecto: el conjunto $\mathbb{R}$ es cerrado, pues: $\mathbb{R}^c = \emptyset$, y ya sabemos que el conjunto vacío es abierto. Y éste también es cerrado, pues: $\emptyset^c = \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es abierto.
- *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
  Si I es un conjunto y, para cada $i \in I$, el conjunto C_i es cerrado, es decir: C_i^c es abierto, entonces es abierto el conjunto:
  $$\bigcup_{i \in I} C_i^c = \Big(\bigcap_{i \in I} C_i\Big)^c,$$
  donde hacemos uso de la proposición V.3 (cf. p. 319) y de las leyes de A. DE MORGAN (cf. p. 384). En conclusión, es cerrado el conjunto $\bigcap_{i \in I} C_i$.
- *La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
  Si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son n conjuntos cerrados, es decir: $C_1^c, C_2^c, \ldots, C_n^c$ son abiertos, entonces es abierto el conjunto: $C_1^c \cap C_2^c \cap \cdots \cap C_n^c = (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n)^c$ (proposición V.4 (cf. p. 319) y leyes de A. DE MORGAN), lo que establece que es cerrada la unión $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.

EJEMPLO 12 Los intervalos $[a, b]$, $(-\infty, b]$ y $[a, +\infty)$ son conjuntos cerrados, pues sus complementarios, los cuales, respectivamente, son estos: $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, $(b, +\infty)$ y $(-\infty, a)$, son conjuntos abiertos (cf. ejemplo 11, p. 319, y proposición V.3).

El intervalo $(a, b]$ no es un conjunto cerrado. En efecto, se tiene:

$$(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, +\infty),$$

y este último conjunto no es abierto, pues a es un punto suyo que no es interior (lo cual se justifica de manera similar a como se procedió en el ejemplo 8, cf. p. 317). Análogamente se demostraría que el intervalo $[a, b)$ no es un conjunto cerrado.

Intervalos cerrados

Los intervalos que son conjuntos cerrados (o **intervalos cerrados**) son:

$$[a,b], \quad (-\infty,b], \quad [a,+\infty), \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \emptyset.$$

Obsérvese que los intervalos $(a, b]$ y $[a, b)$ son conjuntos que no son cerrados ni abiertos.

EJERCICIO 6 *Sea C un conjunto de números reales cerrado y no vacío. Demostrar que si C está acotado superiormente, entonces* $\sup C \in C$. *También, demostrar que si C está acotado inferiormente, entonces* $\inf C \in C$. ▲

EJERCICIO 7 *Demostrar que el conjunto vacío y $\mathbb{R}$ son los únicos conjuntos de números reales que son, simultáneamente, abiertos y cerrados.* ▲

V.2 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Sucesión de números reales

1. Definición de sucesión Una **sucesión de números reales** es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Nota Todas las sucesiones que veremos en este tema serán de números reales. ▲

Si $\boldsymbol{a}$ es una sucesión de números reales, es decir, si $\boldsymbol{a}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, y a_n es la imagen por la aplicación $\boldsymbol{a}$ del número natural n, en símbolos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{a}} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & a_n, \end{array}$$

entonces utilizaremos alguna de las notaciones siguientes para referirnos a la sucesión $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = (a_n; n \in \mathbb{N}), \quad \text{o} \quad \boldsymbol{a} = (a_n),$$

o también:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots.$$

EJEMPLO 13 Si $\boldsymbol{a}$ es la sucesión

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\xrightarrow{\ \boldsymbol{a}\ } \mathbb{R} \\ n &\dashrightarrow \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

entonces la sucesión $\boldsymbol{a}$ se representará de alguna de las siguientes formas:

$$\left(\frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right), \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{n+1}\right),$$

o bien:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots,$$

y también: (a_n), si afirmamos que a_n es el número real $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 14 Si $\boldsymbol{b}$ es la sucesión[12]

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\xrightarrow{\ \boldsymbol{b}\ } \mathbb{R} \\ n &\dashrightarrow (-1)^n, \end{aligned}$$

la sucesión $\boldsymbol{b}$ se denotará de alguna de las maneras siguientes:

$$((-1)^n; n \in \mathbb{N}), \quad \text{o} \quad ((-1)^n),$$

o bien:

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots,$$

y también: (b_n), si $b_n = (-1)^n$.

Términos de una sucesión

Sea $\boldsymbol{a} = (a_n)$ una sucesión de números reales, y sea k un número natural. El **término de orden k** de la sucesión (a_n) es la imagen del número natural k por la aplicación $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}(k) = a_k$.

EJEMPLO 15 Dada la sucesión $\boldsymbol{a} = (a_n)$ del ejemplo 13, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\xrightarrow{\ \boldsymbol{a}\ } \mathbb{R} \\ n &\dashrightarrow \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

el término de orden 0 de la sucesión (a_n) es la imagen del número natural 0 por la aplicación $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}(0) = a_0 = \frac{1}{0+1} = 1,$$

y el término de orden 10 de la sucesión (a_n) es: $\boldsymbol{a}(10) = a_{10} = \dfrac{1}{11}$.

[12]Por convenio, $x^0 = 1$ para todo número real x no nulo.

Para la sucesión $b = (b_n)$ del ejemplo 14:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad b \quad} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & (-1)^n, \end{array}$$

si k es un número natural impar, entonces el término de orden k de la sucesión (b_n) es: $b_k = (-1)^k = -1$; y si k es un número natural par, el término de orden k de la sucesión (b_n) es: $b_k = (-1)^k = 1$.

Si (a_n) es una sucesión de números reales, del conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{N},\ a_k = x\}$$

Conjunto de los términos de una sucesión

diremos es el **conjunto de los términos** de la sucesión (a_n), y se denota:

$$\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

EJEMPLO 16 Para la sucesión (a_n) del ejemplo 13, el conjunto de sus términos es:

$$\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para la sucesión (b_n) del ejemplo 14, el conjunto de sus términos es: $\{b_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1\}$.

Sucesión acotada

2. Sucesiones acotadas De una sucesión de números reales (a_n) diremos está **acotada superiormente** (o **inferiormente**) si el conjunto de sus términos está acotado superiormente (o inferiormente). Es decir, la sucesión (a_n) está acotada superiormente precisamente si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b,$$

y en este caso de b diremos es una **cota superior** de la sucesión (a_n); y está acotada inferiormente precisamente si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a \leqslant a_n,$$

y en este caso de a diremos es una **cota inferior** de la sucesión (a_n).

De la sucesión (a_n) diremos está **acotada** si está acotada tanto superior como inferiormente.

EJEMPLO 17 La sucesión (a_n) del ejemplo 13 está acotada, pues se verifica:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

La sucesión (b_n) del ejemplo 14 también está acotada, pues el conjunto de sus términos: $\{1, -1\}$, está acotado.

La sucesión (n) está acotada inferiormente: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n$, pero no está acotada superiormente.

3. Subsucesiones Sea $\boldsymbol{a} = (a_n)$ una sucesión de números reales; es decir, $\boldsymbol{a}$ es la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ \boldsymbol{a}\ } & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & a_n. \end{array}$$

Si $\mathfrak{p}$ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, es decir, tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathfrak{p}(n+1) > \mathfrak{p}(n),$$

Subsucesión

entonces de la aplicación compuesta $\boldsymbol{a} \circ \mathfrak{p}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, gráficamente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ \mathfrak{p}\ } & \mathbb{N} & \xrightarrow{\ \boldsymbol{a}\ } & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & \mathfrak{p}(n) & \dashrightarrow & a_{\mathfrak{p}(n)}, \end{array}$$

o bien:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ \boldsymbol{a} \circ \mathfrak{p}\ } & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & a_{\mathfrak{p}(n)}, \end{array}$$

diremos es una **subsucesión** de la sucesión (a_n), y la representaremos de alguna de las formas siguientes:

$$\left(a_{\mathfrak{p}(n)}; n \in \mathbb{N}\right), \quad \text{o} \quad \left(a_{\mathfrak{p}(n)}\right),$$

o también:

$$a_{\mathfrak{p}(0)},\ a_{\mathfrak{p}(1)},\ a_{\mathfrak{p}(2)},\ \ldots,\ a_{\mathfrak{p}(n)},\ \ldots.$$

Nota bene Una subsucesión también es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$; luego una subsucesión es a su vez una sucesión. ▲

EJEMPLO 18 La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & \mathbb{N} \\ n & \dashrightarrow & 2n \end{array}$$

es estrictamente creciente, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$\mathfrak{p}(n+1) = 2(n+1) > 2n = \mathfrak{p}(n).$$

Si $\boldsymbol{a} = (a_n)$ es la sucesión del ejemplo 13 (cf. p. 322):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{a}} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & \dfrac{1}{n+1}, \end{array}$$

entonces $\boldsymbol{a} \circ \mathfrak{p}$ es una subsucesión de la sucesión $\boldsymbol{a}$; gráficamente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{a}} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & 2n & \dashrightarrow & a_{2n}, \end{array}$$

donde

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

La subsucesión $\boldsymbol{a} \circ \mathfrak{p}$ puede representarse de alguna de las formas siguientes:

$$\left(\frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{N}\right), \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2n+1}\right),$$

o también:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots,$$

y el conjunto de sus términos es:

$$\{a_{2n}; n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si $\boldsymbol{b} = (b_n)$ es la sucesión del ejemplo 14 (cf. p. 322):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{b}} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & (-1)^n, \end{array}$$

entonces $\boldsymbol{b} \circ \mathfrak{p}$ es una subsucesión de la sucesión $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{b} \circ \mathfrak{p}} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & b_{2n}, \end{array}$$

donde $b_{2n} = (-1)^{2n}$. La subsucesión $\boldsymbol{b} \circ \mathfrak{p}$ puede ser representada por

$$((-1)^{2n}; n \in \mathbb{N}), \quad \text{o} \quad ((-1)^{2n}),$$

o bien

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$$

y el conjunto de sus términos es: $\{b_{2n}; n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$.

Si $(a_{p(n)})$ es una subsucesión de la sucesión de números reales $\boldsymbol{a} = (a_n)$, entonces el término de orden k ($k \in \mathbb{N}$) de la sucesión $(a_{p(n)})$ es la imagen de k por la aplicación $\boldsymbol{a} \circ p$, es decir, es el número real: $a_{p(k)}$, que coincide con el término de orden $p(k)$ de la sucesión (a_n).

EJEMPLO 19 Para la sucesión

$$\left(\frac{1}{2n-1}\right),$$

que es subsucesión de la sucesión

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

(cf. ejemplo 18), el término de orden 10 es:

$$\frac{1}{2 \cdot 10 + 1} = \frac{1}{21},$$

que coincide con el término de orden $2 \cdot 10 = 20$ de la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Sea (a_n) una sucesión de números reales, fijemos un número natural k, y consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{p} & \mathbb{N} \\ n & \dashrightarrow & n+k, \end{array}$$

que es estrictamente creciente. La subsucesión $(a_{p(n)})$, es decir, la sucesión (a_{n+k}) también se denotará de esta forma:

$$(a_n; n \geqslant k)$$

y el conjunto de sus términos también se escribirá así:

$$\{a_n ; n \geqslant k\}.$$

Es decir, las notaciones $(a_n; n \geqslant k)$ y (a_{n+k}) designan la misma sucesión, y

$$\{a_n ; n \geqslant k\} = \{a_{n+k} ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Nota **bene** El término de orden n de la sucesión $(a_n; n \geqslant k)$ —subsucesión de la sucesión (a_n)— coincide con el término de orden $n+k$ de la sucesión (a_n). ▲

EJEMPLO 20 Dada la sucesión de números reales (d_n), donde

$$d_n = \sqrt{\frac{n}{n^2+1}},$$

las dos notaciones siguientes designan la misma subsucesión de la sucesión (d_n):

$$\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}; n \geqslant 10\right), \quad \text{o} \quad \left(\sqrt{\frac{n+10}{(n+10)^2+1}}\right).$$

El término de orden 2 de la sucesión $(d_n; n \geqslant 10)$ es:

$$\sqrt{\frac{2+10}{(2+10)^2+1}} = \sqrt{\frac{12}{145}},$$

que coincide con el término de orden $2 + 10 = 12$ de la sucesión (d_n):

$$d_{12} = \sqrt{\frac{12}{(12)^2+1}} = \sqrt{\frac{12}{145}}.$$

EJEMPLO 21 Para la sucesión (b_n) del ejemplo 14 (cf. p. 322): $((-1)^n)$, su subsucesión $(b_n; n \geqslant 10)$ es la sucesión (b_{n+10}). Como $b_n = (-1)^n$, se tiene: $b_{n+10} = (-1)^{n+10}$, y por tanto la subsucesión $(b_n; n \geqslant 10)$ es concretamente la sucesión $((-1)^{n+10})$. El término de orden 23 de la sucesión $((-1)^n; n \geqslant 10)$ es $(-1)^{23+10} = -1$, que coincide con el término de orden $23 + 10 = 33$ de la sucesión $((-1)^n)$.

Sucesión $(f(n); n \geqslant k)$

Fijado un número natural k, si f es una aplicación del conjunto

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geqslant k\} = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

en $\mathbb{R}$, entonces la notación:

$$(f(n); n \geqslant k)$$

designará la sucesión cuyo término de orden n ($n \in \mathbb{N}$) es el número real $f(n+k)$.

EJEMPLO 22 Dada la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \{6,7,8,\ldots\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & \dfrac{1}{(n-1)(n-5)}, \end{array}$$

la sucesión $(f(n); n \geqslant 6)$, es decir:

$$\left(\frac{1}{(n-1)(n-5)}; n \geqslant 6\right),$$

es la sucesión cuyo término de orden n ($n \in \mathbb{N}$) es:

$$f(n+6) = \frac{1}{((n+6)-1)((n+6)-5)} = \frac{1}{(n+5)(n+1)}.$$

V.3 SUCESIONES CONVERGENTES. LÍMITES INFINITOS

Sucesión que converge a un número real

1. Sucesiones convergentes De una sucesión (a_n) de números reales diremos que **converge** al número real l si, cualquiera que sea el número real $\epsilon > 0$ que fijemos, podemos encontrar un número natural k, que dependerá (en general) de ϵ, tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k pertenecen al intervalo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$. En símbolos:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)\,, \tag{4}$$

o bien:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)\,. \tag{5}$$

Si la sucesión (a_n) converge a algún número real l, de la sucesión (a_n) diremos es una sucesión **convergente**, y del número real l diremos es **límite** de la sucesión (a_n).

Límite

Si no existe ningún número real que sea límite de la sucesión (a_n), de ésta diremos es **no convergente**.

Nota Por abuso de notación, en (4) y en (5) hemos escrito: $\forall\, \epsilon > 0$, cuando teníamos que haber escrito: $\forall\, \epsilon \in (0, +\infty)$; y en (5) hemos escrito: $\forall\, n \geqslant k$, cuando teníamos que haber escrito: $\forall\, n \in \{m \in \mathbb{N} \mid m \geqslant k\}$. ▲

Definiciones equivalentes de sucesión convergente Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea l un número real:

- *La sucesión (a_n) converge al número l precisamente si:*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow |l - a_n| < \epsilon. \tag{6}$$

De acuerdo con la propiedad 4 del valor absoluto (cf. p. 315), se tiene:

$$a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon) \iff |l - a_n| < \epsilon,$$

y escribir (6) es lo mismo que escribir (4).

- *La sucesión (a_n) converge a l precisamente si, para cada número real $\epsilon > 0$, al intervalo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ pertenecen todos los términos de la sucesión (a_n) salvo, posiblemente, una cantidad finita.*

EJEMPLO 23 Sea (b_n) la sucesión que verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_n = 1$; es decir, todos sus términos son iguales a 1. La sucesión (b_n) converge al número real 1.

En efecto. Cualquiera que sea el número real $\epsilon > 0$ que fijemos, como $1 \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$, se verifica que todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$, y hemos encontrado, pues, un número natural k —que en nuestro caso es $k = 0$— tal que todos los términos de la sucesión (b_n) de orden mayor o igual que k pertenecen a $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$.

Sucesión constante

Si c es un número real, análogamente se demostraría que la sucesión (c_n) que verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c_n = c$, cuyos términos son todos iguales a c (sucesión **constante**), converge a c. Esta sucesión constante se representa simplemente por (c).

EJEMPLO 24 La sucesión (a_n), donde

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge al número real 0.

En efecto. Fijemos un número real $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces (cf. corolario de la proposición V.1, p. 313) existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $(1/m) < \epsilon$, y por tanto:

$$n \geqslant m - 1 \implies n + 1 \geqslant m \implies \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{m} < \epsilon \implies a_n \in (0 - \epsilon, 0 + \epsilon)\,,$$

y hemos encontrado un número natural k, precisamente $k = m - 1$, tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k pertenecen a $(0 - \epsilon, 0 + \epsilon)$. Esto establece que la sucesión (a_n) converge a 0.

El límite de una sucesión convergente es único

Proposición V.5 *El límite de una sucesión convergente de números reales es único.*

Demostración Haremos esta demostración por reducción al absurdo; es decir, supondremos que una sucesión (a_n) converge a dos números reales distintos l_1 y l_2.

Pongamos que $l_1 < l_2$, y sea $\epsilon = (l_2 - l_1)/2$, que es positivo. Entonces:

$$l_1 - \epsilon < l_1 + \epsilon = l_2 - \epsilon < l_2 + \epsilon,$$

y por tanto:

$$(l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon) = \emptyset. \tag{7}$$

Pero del hecho de que la sucesión (a_n) converja a l_1 se deduce que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k_1 \Rightarrow a_n \in (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon)\,,$$

y del hecho de que la sucesión (a_n) converja a l_2 se deduce que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k_2 \Rightarrow a_n \in (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon)\,;$$

en consecuencia, si $n \geqslant \max\{k_1, k_2\}$, se tiene:

$$a_n \in (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon)\,,$$

y por tanto: $(l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon) \neq \emptyset$, en contradicción con (7).

En conclusión, si una sucesión es convergente, admite un límite único. C.Q.D.

Notacion Si la sucesión (a_n) converge al número real l, escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \quad \text{o también:} \quad \lim\,(a_n) = l,$$

y ambas notaciones se leen: "el límite de la sucesión (a_n), cuando n tiende a infinito, es l", y ambas significan: $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow |l - a_n| < \epsilon$. ▲

EJERCICIO 8 *Probar que toda sucesión convergente de números reales está acotada.* ▲

Proposición V.6 *Toda subsucesión de una sucesión convergente de números reales es una sucesión convergente que tiene el mismo límite.*

Demostración Sea $a = (a_n)$ una sucesión convergente con límite igual al número l, esto es: $\lim\,(a_n) = l$, y sea $a \circ \mathfrak{p} = (a_{\mathfrak{p}(n)})$ una subsucesión de (a_n), es decir, $\mathfrak{p}$ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Gráficamente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ \mathfrak{p}\ } & \mathbb{N} & \xrightarrow{\ a\ } & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & \mathfrak{p}(n) & \dashrightarrow & a_{\mathfrak{p}(n)}, \end{array} \quad \text{o bien:} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ a\circ\mathfrak{p}\ } & \mathbb{R} \\ n & \dashrightarrow & a_{\mathfrak{p}(n)}. \end{array}$$

Queremos comprobar que la sucesión $(a_{\mathfrak{p}(n)})$ converge a l. Para ello, fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por ser l el límite de la sucesión (a_n), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural n se verifica:

$$n \geqslant k \Rightarrow a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)\,; \tag{8}$$

pero si $n \geqslant k$, entonces:[13] $\mathfrak{p}(n) \geqslant k$, y de (8) deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$n \geqslant k \Rightarrow a_{\mathfrak{p}(n)} \in (l - \epsilon, l + \epsilon)\,.$$

Hemos probado entonces que, fijado $\epsilon > 0$ arbitrario, podemos encontrar un número natural k tal que los términos de la sucesión $(a_{\mathfrak{p}(n)})$ de orden mayor o igual que k pertenecen a $(l - \epsilon, l + \epsilon)$. Es decir: $\lim\,(a_{\mathfrak{p}(n)}) = l$. c.q.d.

EJEMPLO 25 En el ejemplo 24 vimos que $\lim\,(1/(n+1)) = 0$, y en el ejemplo 18 (cf. p. 325) vimos que $(1/(2n+1))$ es una subsucesión de la sucesión $(1/(n+1))$. De acuerdo con la proposición V.6, podemos escribir:

$$\lim\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0.$$

EJEMPLO 26 La sucesión (a_n), donde:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in \{0, 2, 4, \ldots\}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \in \{1, 3, 5, \ldots\}, \end{cases}$$

[13] Dada una aplicación $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente, por recurrencia es fácil demostrar que se verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathfrak{p}(n) \geqslant n$, y en consecuencia para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene: $n \geqslant k \Longrightarrow \mathfrak{p}(n) \geqslant k$.

es decir:

$$1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{5},\ 1,\ \frac{1}{7},\ 1,\ \ldots,$$

no es convergente.

En efecto, su subsucesión (a_{2n}) es esta sucesión constante:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$

cuyo límite es 1 (cf. ejemplo 23, p. 328):

$$\text{lím}\,(a_{2n}) = 1;$$

y su subsucesión (a_{2n-1}) es la sucesión $(1/(2n+1))$, esto es:

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \ldots,\ \frac{1}{2n+1},\ \ldots,$$

cuyo límite es 0 (cf. ejemplo 25):

$$\text{lím}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0.$$

Deducimos que la sucesión (a_n) no es convergente: si lo fuera, todas sus subsucesiones convergerían al mismo límite (cf. proposición V.6), pero sus dos subsucesiones escritas, aunque convergen, lo hacen a límites distintos.

Una sucesión (a_n) de números reales que admite una subsucesión convergente no es, a su vez, necesariamente convergente, como muestra el ejemplo 26. Sin embargo, si la subsucesión que es convergente es de la forma $(a_n; n \geqslant n_0)$ para algún número natural n_0, entonces la sucesión (a_n) sí es convergente, y su límite es el mismo.

En efecto. Sea l el límite de la subsucesión $(a_n; n \geqslant n_0)$. Fijemos un número real $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos de orden mayor o igual que k de la sucesión $(a_n; n \geqslant n_0)$ pertenecen a $(l-\epsilon, l+\epsilon)$; ahora bien, el término de orden n de la sucesión $(a_n; n \geqslant n_0)$ es el término de orden $n+n_0$ de la sucesión (a_n). Es decir, habiendo fijado $\epsilon > 0$, hemos encontrado un número natural k' —precisamente $k' = k + n_0$— tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k' pertenecen a $(l-\epsilon, l+\epsilon)$. En conclusión, la sucesión (a_n) también converge a l. Podemos escribir:

$$\text{lím}\,(a_n; n \geqslant n_0) = \text{lím}\,(a_{n+n_0}) = \text{lím}\,(a_n)\,.$$

Tenemos demostrada, pues, la siguiente

Proposición V.7 *Si la subsucesión $(a_n; n \geqslant k)$ de la sucesión (a_n) de números reales es convergente, entonces la sucesión (a_n) también es convergente y los límites de ambas son iguales:*

$$\text{lím}\,(a_n) = \text{lím}\,(a_n; n \geqslant k)\,.$$

El límite no depende de los primeros términos

Corolario *La propiedad de convergencia de una sucesión de números reales a un límite es independiente de los k primeros términos de la sucesión (cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$).*

Proposición V.8 *Dada una sucesión (a_n) de números reales, se verifica:*

$$\text{lím}\,(a_n) = 0 \iff \text{lím}\,(|a_n|) = 0.$$

Demostración Que la sucesión (a_n) converge a 0 significa:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (-\epsilon, \epsilon),$$

y que la sucesión $(|a_n|)$ converge a 0 significa:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ |a_n| \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Ambos enunciados son equivalentes, pues: $a_n \in (-\epsilon, \epsilon) \iff |a_n| \in (-\epsilon, \epsilon)$. C.Q.F.

Proposición V.9 *Dada una sucesión (a_n) de números reales, se verifica:*

$$\text{lím}\,(a_n) = l \iff \text{lím}\,(a_n - l) = 0.$$

Demostración Que la sucesión (a_n) converge a l significa:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon),$$

y que la sucesión $(a_n - l)$ converge a 0 significa:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n - l \in (-\epsilon, \epsilon),$$

y ambos enunciados son equivalentes, pues: $a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon) \iff a_n - l \in (-\epsilon, \epsilon)$. C.Q.F.

Corolario *Dada una sucesión (a_n) de números reales, se verifica:*

$$\text{lím}\,(a_n) = l \iff \text{lím}\,(a_n - l) = 0 \iff \text{lím}\,(|a_n - l|) = 0.$$

Proposición V.10 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales para las cuales existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant |b_n|. \tag{9}$$

Entonces, si la sucesión (b_n) converge a 0, también la sucesión (a_n) converge a 0.

Demostración Si la sucesión (b_n) converge a 0, entonces también converge a 0 su subsucesión (b_{n+n_0}) (cf. proposición V.6), lo que significa:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant k,\ |b_{n-n_0}| < \epsilon, \tag{10}$$

y como de (9) se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene: $|a_{n+n_0}| \leqslant |b_{n-n_0}|$, con (10) se concluye: $\forall \epsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant k,\ |a_{n+n_0}| < \epsilon$, es decir: la sucesión (a_{n-n_0}) converge a 0. En consecuencia (cf. proposición V.7), la sucesión (a_n) converge a 0. C.Q.D.

Límite y valor absoluto

Corolario *Si la sucesión (a_n) de números reales converge al número real l, entonces la sucesión $(|a_n|)$ converge a $|l|$; es decir:*

$$\text{lím}\,(a_n) = l \implies \text{lím}\,(|a_n|) = |l|\,.$$

Demostración Si la sucesión (a_n) converge a l, entonces (cf. proposición V.9) la sucesión $(a_n - l)$ converge a 0, y como (cf. proposición V.2, p. 316): $\big||a_n| - |l|\big| \leqslant |a_n - l|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con la proposición V.10 concluimos que la sucesión $(|a_n| - |l|)$ converge a 0, es decir (cf. proposición V.9), la sucesión $(|a_n|)$ converge a $|l|$: $\text{lím}\,(|a_n|) = |l|$. C.Q.D.

Operaciones entre sucesiones convergentes En el anexo (cf. p. 359) se demuestra la siguiente

Límite de una suma, de un producto, y de un cociente

Proposición V.11 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales, con $\text{lím}\,(a_n) = a$ y $\text{lím}\,(b_n) = b$. Se verifica:*

(1) (Linealidad) si α y β son dos números reales, la sucesión $(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente, y

$$\text{lím}\,(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\,\text{lím}\,(a_n) + \beta\,\text{lím}\,(b_n) = \alpha a + \beta b.$$

(2) (Producto) la sucesión $(a_n b_n)$ es convergente, y

$$\text{lím}\,(a_n b_n) = \text{lím}\,(a_n)\cdot\text{lím}\,(b_n) = ab.$$

(3) (Cociente) si $b \neq 0$, entonces exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0,\ b_n \neq 0$, y

$$\text{lím}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\text{lím}\,(a_n)}{\text{lím}\,(b_n)} = \frac{a}{b}.$$

Nota bene En el último apartado de esta proposición, sobre el límite de un cociente, la sucesión (b_n) puede tener algún término nulo entre los de orden menor que n_0; propiamente, entonces, deberíamos escribir: $\text{lím}\,(a_n/b_n;\, n \geqslant n_0) = a/b$. Pero para no recargar la notación, y considerando que el límite de una sucesión convergente es independiente de sus primeros términos, escribimos simplemente: $\text{lím}\,(a_n/b_n) = a/b$. Análogo comentario podríamos hacer de cualquier límite de la forma: $\text{lím}\,(B_n)$ donde B_n es una expresión tal que está definida la sucesión $(B_n;\, n \geqslant k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. ▲

Límites y polinomios Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado p ($p \geqslant 1$):

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p, \tag{11}$$

para cada número real α, $P(\alpha)$ es el número: $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_p\alpha^p$. Si la sucesión (b_n) de números reales converge al número real b, entonces la sucesión $(P(b_n))$ converge al número $P(b)$.

En efecto. Para $p = 1$, se tiene el resultado por la linealidad de los límites (cf. proposición V.11(1)). Si suponemos verdadera la propiedad para todo polinomio de grado $p - 1$, y $P(x)$ es el polinomio de grado p de (11), entonces podemos escribir:

$$P(x) = a_0 + xQ(x), \quad \text{con } Q(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_p x^{p-1}.$$

Pero $Q(x)$ es un polinomio de grado $p - 1$, para el cual, por hipótesis, se tiene que $\lim(Q(b_n)) = Q(b)$, luego:

$$\begin{aligned}\lim(P(b_n)) &= \lim(a_0 + b_n Q(b_n))\\ &= \lim(a_0) + [\lim(b_n)]\,[\lim(Q(b_n))] = a_0 + bQ(b) = P(b),\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que son convergentes las sucesiones (b_n) y $(Q(b_n))$. Es decir, la sucesión $(P(b_n))$ es convergente, y de límite $P(b)$. Hemos demostrado, pues, por recurrencia sobre p, esta implicación:

$$\lim(b_n) = b \implies \lim(P(b_n)) = P(b).$$

EJERCICIO 9 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales. Si*

$$u_n = \max\{a_n, b_n\} \quad y \quad v_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad con\ n \in \mathbb{N},$$

demostrar que las sucesiones (u_n) y (v_n) son convergentes, y calcular su límite. ▲

2. *Límites infinitos* De una sucesión (a_n) de números reales diremos que **tiende a más infinito** ($+\infty$) si, para cualquier número real b que fijemos, existe un número natural k tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k son mayores que b. En símbolos:

Límite más infinito

$$\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow a_n > b, \tag{12}$$

o bien: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n > b$.

Si la sucesión (a_n) tiende a más infinito, escribiremos

$$\lim(a_n) = +\infty, \quad \text{o también:} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

y ambas notaciones se leen: "límite de a_n es más infinito".

Consecuencia de la definición de límite más infinito Una primera consecuencia de esta definición es la siguiente:

- *Si una sucesión de números reales tiende a más infinito, entonces es no convergente.*

  En efecto. De la definición se deduce que una sucesión que tiende a más infinito no está acotada superiormente, y en consecuencia (cf. ejercicio 8, p. 330) es no convergente.

EJEMPLO 27 La sucesión (n) tiende a más infinito: $\lim(n) = +\infty$.

En efecto. Fijemos un número real b. Si $b < 0$, entonces todos los términos de la sucesión (n) son mayores que b; y si $b \geqslant 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > b$ (cf. propiedad arquimediana de los números reales, p. 313), y en consecuencia todos los términos de la sucesión (n) de orden mayor o igual que k son mayores que b. Ello establece que la sucesión (n) tiende a más infinito.

EJEMPLO 28 La sucesión $((-1)^n n)$ no tiende a más infinito.

Si fijamos el número real $b = 0$, no podemos encontrar ningún número natural k tal que todos los términos de la sucesión de orden mayor o igual que k sean mayores que 0; concretamente: $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}(2k+1) = -(2k+1) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 10 ***Demostrar que toda sucesión de números reales que tiende a más infinito está acotada inferiormente.*** ▲

Una caracterización de las sucesiones que tienden a más infinito, y que será utilizada más tarde, se ve en la siguiente:

CNS de límite más infinito

Proposición V.12 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (a_n) de números reales tienda a más infinito es que se verifiquen simultáneamente los dos siguiente asertos:*

a) *todos los términos de la sucesión, salvo quizá una cantidad finita, son positivos:* $\exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n > 0$.

b) $\lim\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 0$.

Demostración La condición es necesaria. Aplicando la definición de límite más infinito para $b = 0$, se nos asegura que todos los términos de la sucesión (a_n) son positivos a partir de cierto orden. Por otro lado, si fijamos $\epsilon > 0$, haciendo uso de la definición para el número $1/\epsilon$, podemos afirmar existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geqslant k_1,\ a_n > \frac{1}{\epsilon}, \quad \text{o bien} \quad \forall\, n \geqslant k_1,\ \left|\frac{1}{a_n}\right| < \epsilon,$$

y así: $\lim(1/a_n) = 0$.

La condición es suficiente. Fijemos $b \in \mathbb{R}$. Si $b \leqslant 0$, de acuerdo con el primer aserto deducimos existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geqslant k,\ a_n > b$; si $b > 0$, de ambos asertos deducimos existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n > 0 \text{ y } \frac{1}{a_n} \in \left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right),$$

y por tanto:

$$\forall\, n \geqslant k,\ 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{b},$$

luego: $\forall\, n \geqslant k,\ a_n > b$, y en definitiva: $\lim(a_n) = +\infty$. C.Q.D.

El límite más infinito no depende de los primeros términos

Corolario *Si la subsucesión $(a_n; n \geqslant k)$ de una sucesión (a_n) de números reales tiende a más infinito, entonces la sucesión (a_n) tiende a más infinito.*

Otra caracterización de las sucesiones que tienden a más infinito, y que el lector puede comprobar por sí mismo, es la siguiente:

Proposición V.13 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales tienda a más infinito es que toda subsucesión suya no esté acotada superiormente.*

Proposición V.14 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Si la sucesión (a_n) tiende a más infinito y la sucesión (b_n) está acotada inferiormente, entonces la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a más infinito.*

Demostración Sea α una cota inferior de la sucesión (b_n). Fijemos $r \in \mathbb{R}$. Como la sucesión (a_n) tiende a más infinito, para el número real $r - \alpha$ existe un número natural k tal que: $\forall\, n \geqslant k,\ a_n > r - \alpha$, y en consecuencia:

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n + b_n > r - \alpha + b_n \geqslant r - \alpha + \alpha = r,$$

y la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a más infinito. C.Q.D.

Límite de una suma cuando uno de los sumandos tiende a más infinito

Corolario *Sea (a_n) una sucesión de números reales que tiende a más infinito. Entonces:*

1) *Si la sucesión (b_n) es convergente, la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a más infinito.*
2) *Si la sucesión (b_n) tiende a más infinito, la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a más infinito.*

Demostración Es consecuencia de que toda sucesión que sea convergente o tienda a más infinito está acotada inferiormente (cf. ejercicio 8, p. 330, y ejercicio 10, p. 335). C.Q.D.

Proposición V.15 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Si la sucesión (a_n) tiende a más infinito y la sucesión (b_n) verifica:*

$$\exists\, a > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ b_n > a,$$

entonces la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a más infinito.

Demostración De acuerdo con la hipótesis, existen un número real $a > 0$ y un número natural k_1 tales que:

$$\forall\, n \geqslant k_1,\ b_n > a > 0. \tag{13}$$

Para ver que $\lim(a_n b_n) = +\infty$, fijemos $r \in \mathbb{R}$, y sea $b = \max\{r/a, 1\}$. Como $\lim(a_n) = +\infty$, para el número real b existe un número natural k_2 tal que: $\forall\, n \geqslant k_2,\ a_n > b$. Si tomamos como k el número $k = \max\{k_1, k_2\}$, y teniendo en cuenta que a y b son números positivos, con (13) podemos afirmar que, para todo $n \geqslant k$ natural, se verifica:

$$a_n b_n > ba = \left(\max\left\{\frac{r}{a}, 1\right\}\right) \cdot a \geqslant \frac{r}{a} \cdot a = r.$$

Es decir: $\lim(a_n b_n) = +\infty$. C.Q.D.

Límite de un producto cuando uno de los factores tiende a más infinito

Corolario *Sea (a_n) una sucesión de números reales que tiende a más infinito. Entonces:*

1) *Si la sucesión (b_n) converge a un número positivo, la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a más infinito.*
2) *Si la sucesión (b_n) tiende a más infinito, la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a más infinito.*

Demostración Si $\lim(b_n) = l$, con $l > 0$, tomando $\epsilon = l/2$, todos los términos de la sucesión (b_n) de orden mayor o igual que algún $k \in \mathbb{N}$ pertenecen al intervalo $(l - l/2, l + l/2)$, y por tanto:

$$b_n > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0,$$

para cada $n \geqslant k$. Esto es, la sucesión (b_n) verifica la propiedad del enunciado de la proposición V.15.

Si $\lim(b_n) = +\infty$, fijado $b = 1$, todos los términos de la sucesión (b_n) de orden mayor o igual que algún $k \in \mathbb{N}$ son mayores que 1, y por tanto también en este caso se verifica la propiedad citada.

Con la proposición V.15, en ambos casos se concluye: $\lim(a_n b_n) = +\infty$. C.Q.D.

EJEMPLO 29 Si $p \in \mathbb{N}^*$, la sucesión (n^p) tiende a más infinito.

En efecto. Si $p = 1$, entonces (cf. ejemplo 27, p. 335): $\lim(n) = +\infty$. Si suponemos que se verifica: $\lim(n^{p-1}) = +\infty$, entonces (cf. corolario de la proposición V.15):

$$\lim(n^p) = \lim(n^{p-1} n) = +\infty.$$

Y así se demuestra, por recurrencia sobre p, el resultado: $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \lim(n^p) = +\infty$.

Una consecuencia de lo recién demostrado y de la proposición V.12 es esta:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \text{lím}\left(\frac{1}{n^p}\right) = 0.$$

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que $\text{lím}\,(a_n) = -\infty$ y $\text{lím}\,(b_n) = 0$, entonces no podemos asegurar nada acerca del límite (si existe o no, y en caso afirmativo si es finito o infinito) de la sucesión $(a_n b_n)$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 30 Se verifica:

$$\text{lím}\,(n) = +\infty, \quad \text{lím}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \text{lím}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \text{lím}\,(1) = 1.$$

También:

$$\text{lím}\,(n^2) = +\infty, \quad \text{lím}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \text{lím}\,(n^2 \cdot \frac{1}{n}) = \text{lím}\,(n) = +\infty.$$

Finalmente (cf. proposición V.8, p. 332):

$$\text{lím}\,(n) = +\infty, \quad \text{y} \quad \text{lím}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0,$$

pero la sucesión $\left(n \cdot ((-1)^n/n);\, n \geqslant 1\right)$, esto es:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots,$$

no es convergente, ni tiende a más infinito.

Sucesiones que tienden a menos infinito De una sucesión (a_n) de números reales diremos **tiende a menos infinito** $(-\infty)$ si, para cualquier número real b que fijemos existe un número natural k tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k son menores que b. En símbolos:

Límite menos infinito

$$\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow a_n < b,$$

o bien: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n < b$.

Si la sucesión (a_n) tiende a menos infinito, escribiremos

$$\text{lím}\,(a_n) = -\infty, \quad \text{o también:} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

y ambas notaciones se leen: "límite de a_n es menos infinito".

Consecuencias de la definición de límite menos infinito Se verifica:

- *Una sucesión (a_n) de números reales tiende a menos infinito precisamente si la sucesión $(-a_n)$ tiende a más infinito.*
- *Una sucesión de números reales que tiende a menos infinito no es convergente.*

De una forma análoga a como probamos la proposición V.12 (cf. p. 335), la proposición V.14 (cf. p. 336) y la proposición V.15 (cf. p. 337), probaríamos las siguientes:

CNS de límite menos infinito

Proposición V.16 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (a_n) de números reales tienda a menos infinito es que se verifiquen simultáneamente los dos siguiente asertos:*

a) *todos los términos de la sucesión, salvo quizá una cantidad finita, son negativos:* $\exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n < 0$.

b) $\lim \left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 0$.

El límite menos infinito no depende de los primeros términos

Corolario *Si la subsucesión $(a_n; n \geqslant k)$ de una sucesión (a_n) tiende a menos infinito, entonces la sucesión (a_n) tiende a menos infinito.*[14]

Dejamos como ejercicio al lector comprobar la siguiente caracterización de las sucesiones que tienden a menos infinito:

Proposición V.17 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales tienda a menos infinito es que toda subsucesión suya no esté acotada inferiormente.*

Unicidad del límite, finito o infinito

Nota bene De acuerdo con los resultados vistos, podemos afirmar:

- si la sucesión (a_n) tiende a más infinito, entonces no tiende a menos infinito y no es convergente;
- si la sucesión (a_n) tiende a menos infinito, entonces no tiende a más infinito y no es convergente;
- finalmente, si la sucesión (a_n) es convergente, entonces está acotada, y por tanto no tiene límites infinitos.

Recordando la proposición V.5 (cf. p. 329), podemos, pues, afirmar: el límite de una sucesión, si existe, es único, tanto si es finito como infinito. ▲

Proposición V.18 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Si la sucesión (a_n) tiende a menos infinito y la sucesión (b_n) está acotada superiormente, entonces la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a menos infinito.*

---

[14] A partir de ahora, aplicaremos el comentario de la *nota bene* de la p. 333 también a los límites infinitos. De esta forma, si B_n es una expresión tal que está definida la sucesión $(B_n; n \geqslant k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y esta sucesión admite límite —finito o infinito—, en vez de denotar este límite por $\lim(B_n; n \geqslant k)$, lo denotaremos simplemente por $\lim(B_n)$.

Límite de una suma cuando uno de los sumandos tiende a menos infinito

Corolario *Sea (a_n) una sucesión de números reales que tiende a menos infinito. Entonces:*

1) *Si la sucesión (b_n) es convergente, la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a menos infinito.*
2) *Si la sucesión (b_n) tiende a menos infinito, la sucesión $(a_n + b_n)$ tiende a menos infinito.*

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que $\lim(a_n) = +\infty$ y $\lim(b_n) = -\infty$, entonces no podemos asegurar nada acerca del límite (si existe o no, o si es finito o infinito) de la sucesión $(a_n + b_n)$, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 31 Se verifica:

$$\lim(n) = +\infty, \quad \lim(-n) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim(n + (-n)) = \lim(0) = 0,$$

y también:

$$\lim(2n) = +\infty, \quad \lim(-n) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim(2n + (-n)) = \lim(n) = +\infty.$$

Por otro lado, si (a_n) es la sucesión definida por

$$a_n = \begin{cases} -n, & \text{si } n \text{ es par}, \\ 1 - n, & \text{si } n \text{ es impar}, \end{cases}$$

entonces: $\lim(n) = +\infty$ y $\lim(a_n) = -\infty$, pero la sucesión $(n + a_n)$ es:

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ \ldots,$$

que no tiene límite, ni finito ni infinito (es decir, no es convergente y no tiende a más infinito ni a menos infinito).

Proposición V.19 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Si la sucesión (a_n) tiende a menos infinito y la sucesión (b_n) verifica:*

$$\exists\, a > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ b_n > a,$$

entonces la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a menos infinito.

Límite de un producto cuando uno de los factores tiende a menos infinito

Corolario *Sea (a_n) una sucesión de números reales que tiende a menos infinito. Entonces:*

1) *Si la sucesión (b_n) converge a un número positivo, la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a menos infinito.*
2) *Si la sucesión (b_n) tiende a más infinito, la sucesión $(a_n b_n)$ tiende a menos infinito.*

EJERCICIO 11 *Sean (a_n), (b_n) y (c_n) tres sucesiones de números reales tales que:*

$$\lim(a_n) = +\infty, \quad \lim(b_n) = -\infty \quad y \quad \lim(c_n) = l, \quad \text{donde } l < 0.$$

Probar que $\lim(a_n c_n) = -\infty$ *y* $\lim(b_n c_n) = +\infty$. ▲

EJERCICIO 12 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que* $\lim(a_n) = -\infty$ *y* $\lim(b_n) = -\infty$. *Probar que* $\lim(a_n b_n) = +\infty$. ▲

En el siguiente cuadro resumimos lo visto sobre límites, finitos o infinitos, de sucesiones de números reales. Cuando la sucesión (a_n) es convergente, denotamos con a su límite, y análogamente, si la sucesión (b_n) es convergente, denotamos con b su límite. Un signo de interrogación ('?') significa que no podemos asegurar nada de la sucesión correspondiente.

Cuadro-resumen de propiedades para cálculo de límites

$\lim(a_n)$	$\lim(b_n)$	$\lim(a_n + b_n)$	$\lim(a_n b_n)$
a	b	$a + b$	ab
a	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, si $a > 0$ $-\infty$, si $a < 0$?, si $a = 0$
a	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$, si $a > 0$ $+\infty$, si $a < 0$?, si $a = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

EJEMPLO 32 Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales de grado $p \geqslant 1$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p, \quad \text{con } a_p \neq 0.$$

Entonces:

$$\lim(P(n)) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_p > 0, \\ -\infty, & \text{si } a_p < 0. \end{cases} \tag{14}$$

En efecto. Para cada $n \geqslant 1$ se verifica:

$$P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p = \left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n} + a_p\right) n^p, \tag{15}$$

y como (cf. ejemplo 29, p. 337):

$$\lim\left(\frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n} + a_p\right) = a_p \quad \text{y} \quad \lim(n^p) = +\infty,$$

de (15) deducimos (14).

Si Q es otro polinomio, con coeficientes reales de grado $q \geqslant 1$:

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q, \quad \text{con } b_q \neq 0,$$

entonces, para cada $n \geqslant 1$ tal que $Q(n) \neq 0$, se verifica:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{p-q} \frac{\dfrac{a_0}{n^p} + \dfrac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + \dfrac{a_{p-1}}{n} + a_p}{\dfrac{b_0}{n^q} + \dfrac{b_1}{n^{q-1}} + \cdots + \dfrac{b_{q-1}}{n} + b_q},$$

y como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{n^p} + \dfrac{a_1}{n^{p-1}} + \cdots + \dfrac{a_{p-1}}{n} + a_p}{\dfrac{b_0}{n^q} + \dfrac{b_1}{n^{q-1}} + \cdots + \dfrac{b_{q-1}}{n} + b_q} = \frac{a_p}{b_q},$$

se tiene:

- si $p > q$, entonces $\lim\,(n^{p-q}) = +\infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \dfrac{a_p}{b_q} > 0, \\ -\infty, & \text{si } \dfrac{a_p}{b_q} < 0; \end{cases}$$

- si $p = q$, entonces $\lim\,(n^{p-q}) = \lim\,(1) = 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q};$$

- si $p < q$, entonces $\lim\,(n^{p-q}) = 0$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0.$$

Resumimos en el siguiente cuadro lo obtenido:

Cuadro-resumen de límites y polinomios

p y q	$\lim\,(n^{p-q})$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$
$p > q$	$+\infty$	$+\infty$, si $\dfrac{a_p}{b_q} > 0$ $-\infty$, si $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$
$p = q$	$\lim\,(1) = 1$	$\dfrac{a_p}{b_q}$
$p < q$	0	0

Por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}(1 - n^2) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{1 + n^2} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{1 - n^2} = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 1}{3n^4 - n^2} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{3n^4 - n^2} = 0.$$

Punto adherente

3. Punto adherente Dado un conjunto no vacío A de números reales, de un punto x diremos es **punto adherente** de A (o adherente a A) si existe una sucesión (a_n) de puntos de A que converge a x, es decir, la sucesión (a_n) verifica:

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\; a_n \in A \\ \quad \text{y} \\ \text{lím}\,(a_n) = x. \end{cases}$$

EJEMPLO 33 El punto $x = 1$ es adherente al conjunto $A = (1, 2]$, pues la sucesión

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

es de puntos de A y obviamente: $\text{lím}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

EJEMPLO 34 El punto $x = 0$ es un punto adherente de este conjunto:

$$B = \left\{ \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\},$$

pues la sucesión $(1/(n+1))$ tiene sus términos en B, y $\text{lím}\,(1/(n+1)) = 0$.

Consecuencias de la definición de punto adherente Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se verifica:

- *Todo punto de A es adherente a A.*
  En efecto, si $a \in A$, entonces la sucesión constante (a) tiene sus términos en el conjunto A y $\text{lím}\,(a) = a$ (cf. convergencia de una sucesión constante, p. 329).
- *Un punto que no sea de A puede ser adherente a A.*
  Como muestran el ejemplo 33 y el ejemplo 34.

Proposición V.20 *Si A es un conjunto no vacío de números reales y x un número real, entonces:*

$$x \text{ es adherente a } A \iff \left[\forall\ (a,b)\,,\ x \in (a,b) \Rightarrow (a,b) \cap A \neq \emptyset\right].$$

Demostración Si x es adherente a A, entonces existe una sucesión (a_n) de puntos de A que converge a x. Pero si $\text{lím}\,(a_n) = x$, y (a,b) es un intervalo abierto tal que $x \in (a,b)$, entonces: $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a,b)$, con $\epsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$, y por tanto (cf. definición de sucesión convergente, p. 328) al intervalo (a,b) pertenecen términos de la sucesión (a_n), y en consecuencia: $(a,b) \cap A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, si se verifica: $\forall\ (a,b)\,,\ x \in (a,b) \Rightarrow (a,b) \cap A \neq \emptyset$, en particular se tiene:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset,$$

y podemos formar una sucesión $(a_n; n \geqslant 1)$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap A,$$

sucesión que es de puntos de A. Pero también esta sucesión converge a x. En efecto: si fijamos $\epsilon > 0$, entonces (cf. corolario de la proposición V.1, p. 313) existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $(1/k) < \epsilon$, y por tanto:

$$\forall\, n \geqslant k,\ \frac{1}{n} < \epsilon,$$

y en consecuencia: $\forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, y así $\lim(a_n) = x$. En conclusión: x es un punto adherente de A. c.q.d.

El supremo de un conjunto acotado superiormente es adherente al conjunto (y análogamente con ínfimo)

Corolario *Si A es un conjunto no vacío acotado superiormente (inferiormente), entonces el supremo (ínfimo) de A es adherente a A.*

Demostración Supongamos que A está acotado superiormente, y sea $s = \sup A$. Si (a, b) es un intervalo abierto tal que $s \in (a, b)$, entonces en el intervalo $(a, s]$ hay puntos del conjunto A (cf. propiedades de supremo y de ínfimo, p. 312), y por tanto $(a, s] \cap A \neq \emptyset$, y como $(a, b) \cap A \supseteq (a, s] \cap A$, se deduce que $(a, b) \cap A \neq \emptyset$. Así, habiendo fijado un intervalo (a, b) al que s pertenece, hemos probado que $(a, b) \cap A \neq \emptyset$; es decir, s es adherente a A.

Análogamente probaríamos que si A está acotado inferiormente, entonces $\inf A$ es un punto adherente de A. c.q.d.

Corolario *Si A es un conjunto de números reales y x un número real, entonces:*

$$x \text{ no es adherente a } A \iff \exists\ (a, b)\,,\ \begin{cases} x \in (a, b) \\ \quad y \\ (a, b) \cap A = \emptyset. \end{cases}$$

Adherencia

Adherencia de un conjunto Dado un conjunto no vacío A de números reales, del conjunto de sus puntos adherentes, que denotaremos por $\overline{A}$, diremos es la **adherencia de A**:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto adherente de } A\}\,.$$

Consecuencias de la definición de adherencia Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se verifica:

- $A \subseteq \overline{A}$.

  Pues todo punto de A es adherente a A.
- *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$(x \in \overline{A}) \iff [\,\forall\ (a, b)\,,\ x \in (a, b) \Rightarrow (a, b) \cap A \neq \emptyset\,]\,,$$

y

$$(x \notin \overline{A}) \iff \exists\ (a,b),\ \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \cap A = \emptyset. \end{cases} \tag{16}$$

Como consecuencia de la proposición V.20 y de su segundo corolario.

- $\forall\ (a,b),\ [(a,b) \cap A = \emptyset] \Rightarrow \left[(a,b) \cap \overline{A} = \emptyset\right]$.

  En efecto. Sea (a,b) un intervalo abierto tal que $(a,b) \cap A = \emptyset$. Si $(a,b) \cap \overline{A}$ fuera no vacío, y x fuera un elemento suyo, existiría una sucesión (a_n) de puntos de A que convergería a x; pero entonces, como $x \in (a,b)$, habría términos de la sucesión (a_n) en (a,b), en contra de la hipótesis.

- *El conjunto $\overline{A}$ es cerrado.*

  De las consecuencias anteriores se deduce:

$$(x \notin \overline{A}) \Rightarrow \exists\ (a,b),\ \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \cap A = \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\ (a,b),\ \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \exists\ (a,b),\ \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \subseteq (\overline{A})^c, \end{cases}$$

  y por tanto cada punto de $(\overline{A})^c$ es interior a $(\overline{A})^c$. En consecuencia, el conjunto $(\overline{A})^c$ es abierto, y $\overline{A}$ es cerrado.

- *Una condición necesaria y suficiente para que A sea cerrado es: $A = \overline{A}$.*

  En efecto. Si A es cerrado (es decir, A^c es abierto) y $x \in A^c$, entonces existe un intervalo abierto (a,b) tal que $x \in (a,b)$, y $(a,b) \subseteq A^c$, o bien: $(a,b) \cap A = \emptyset$, esto es:

$$\exists\ (a,b),\ \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \cap A = \emptyset, \end{cases}$$

  y por tanto $x \notin \overline{A}$ (cf. equivalencia (16)). En consecuencia: $A^c \subseteq (\overline{A})^c$, o lo que es lo mismo: $\overline{A} \subseteq A$, y teniendo en cuenta que $A \subseteq \overline{A}$ (cf. primera consecuencia de la definición de adherencia), concluimos que $A = \overline{A}$.

  Recíprocamente, si $A = \overline{A}$, entonces A es un conjunto cerrado, pues lo es $\overline{A}$.

- *Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

  Es inmediato a partir de la definición, pues toda sucesión de puntos de A es también sucesión de puntos de B.

El límite de una s. convergente de puntos de un cerrado es un punto del cerrado

Proposición V.21 *Si (a_n) es una sucesión convergente de puntos de un conjunto cerrado $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces* $\lim (a_n) \in A$.

Demostración El punto $\lim (a_n)$ pertenece a la adherencia de A, pues es el límite de una sucesión de puntos de A; como A es cerrado: $A = \overline{A}$, y entonces $\lim (a_n) \in A$. c.q.d.

Consecuencias de la proposición V.21 Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales. Se verifica:

1) *Si existe un número natural k tal que*

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \geqslant \alpha, \quad con\ \alpha \in \mathbb{R},$$

entonces: $\lim\,(a_n) \geqslant \alpha$.

En efecto: el intervalo $[\alpha, +\infty)$ es un conjunto cerrado, y los términos de la sucesión $(a_n; n \geqslant k)$ son puntos de $[\alpha, +\infty)$, luego podemos escribir (cf. proposición V.21, p. 345): $\lim\,(a_n; n \geqslant k) = \lim\,(a_n) \in [\alpha, +\infty)$, y $\lim\,(a_n) \geqslant \alpha$.

2) *Si existe un número natural k tal que:*

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \leqslant \alpha, \quad con\ \alpha \in \mathbb{R},$$

entonces $\lim\,(a_n) \leqslant \alpha$.

3) *Si existe un número natural k tal que:*

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \leqslant b_n,$$

entonces $\lim\,(a_n) \leqslant \lim\,(b_n)$.

Es una consecuencia de aplicar el primer apartado a la sucesión $(b_n - a_n)$ y al número real $\alpha = 0$.

Nota Obsérvese que si todos los términos de una sucesión convergente son puntos de un conjunto abierto, entonces no se deduce necesariamente que el límite de la sucesión pertenezca al conjunto abierto. Por ejemplo, para la sucesión $(1/(n+1); n \geqslant 1)$, sus términos son puntos del conjunto abierto $(0,1)$, pero su límite, que es el número 0, no pertenece a este conjunto abierto.

Una consecuencia de esto es que si (a_n) es una sucesión convergente que verifica

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n > \alpha, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R},$$

entonces no se puede inferir que $\lim\,(a_n)$ sea mayor que α, aunque sí que es mayor o igual. ▲

Nota Si en la definición de punto adherente de un conjunto permitiéramos que éste fuera el conjunto vacío, entonces ningún punto x sería adherente a $\emptyset$. Convendremos en que la adherencia del conjunto vacío es el conjunto vacío:

$$\overline{\emptyset} = \emptyset,$$

y con esta definición siguen siendo válidas las propiedades enunciadas de la adherencia de un conjunto. ▲

EJERCICIO 13 *Sea B un conjunto de números reales. Si x es un número real, demostrar que o bien x es un punto interior de B: $x \in \mathring{B}$, o bien x es un punto adherente de B^c: $x \in \overline{B^c}$, pero no ambas simultáneamente. A partir de este resultado, concluir: $B^{c-c} = \mathring{B}$, donde B^{c-c} designa el conjunto $(\overline{B^c})^c$.* ▲

V.4 SUCESIONES MONÓTONAS

Sucesión creciente

De la sucesión de números reales (a_n) diremos es **creciente** si cada término es menor o igual que el siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Sucesión estrictamente creciente

De la sucesión (a_n) diremos es **estrictamente creciente** si cada término es menor que el siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}.$$

Sucesión decreciente

De la sucesión (a_n) diremos es **decreciente** si cada término es mayor o igual que el siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Sucesión estrictamente decreciente

De la sucesión (a_n) diremos es **estrictamente decreciente** si cada término es mayor que el siguiente:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}.$$

S. monótona

De la sucesión (a_n) diremos es **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 35 La sucesión $(a_n; n \geqslant 1)$, donde[15]

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

es estrictamente creciente.

Tenemos que probar que cada término de la sucesión $(a_n; n \geqslant 1)$ es menor que el siguiente, o bien, que para cada $n \geqslant 1$ se verifica: $a_{n+1} - a_n > 0$. Se tiene:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

EJEMPLO 36 La sucesión $(b_n; n \geqslant 1)$, donde:

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!},$$

es decreciente.

En efecto:

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2}{n!} - \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{2(n+1)}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{n-1}{(n+1)!} \geqslant 0.$$

---

[15] Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el **factorial** de n, que se denota por $n!$, de la forma:

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdots n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*.$$

Sucesión geométrica

Dado un número real q no nulo, de la sucesión (q^n) diremos es la **sucesión geométrica de razón q**.

Propiedades de la sucesión geométrica Se verifica:

1) Si $q > 1$, la sucesión (q^n) es estrictamente creciente y no está acotada superiormente.

Por ser $q > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $q^n > 0$, y como $q - 1 > 0$:

$$(q-1)q^n > 0, \quad \text{o bien} \quad q^{n+1} > q^n;$$

es decir, la sucesión (q^n) es estrictamente creciente.

Por otro lado, si la sucesión (q^n) estuviese acotada superiormente, existiría el supremo del conjunto $\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$; denotándolo por s, tendríamos que $s > 0$, de donde (considerando que $q > 1$): $(s/q) < s$, lo que establecería que s/q no es una cota superior de $\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, es decir, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{s}{q} < q^m, \quad \text{o bien} \quad s < q^{m+1},$$

lo que estaría en contra de que s fuera el supremo de $\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

2) Si $q = 1$, la sucesión (q^n) es constante:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots.$$

3) Si $0 < q < 1$, la sucesión (q^n) es estrictamente decreciente y podemos escribir: $\inf\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Por ser $q > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $q^n > 0$, y como $1 - q > 0$:

$$(1-q)q^n > 0, \quad \text{o bien} \quad q^n > q^{n+1};$$

es decir, la sucesión (q^n) es estrictamente decreciente.

Por otro lado, la sucesión (q^n) está acotada inferiormente por 0, luego existe el ínfimo del conjunto de sus términos: $l = \inf\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, y se verifica que $l \geqslant 0$. Ahora bien, si fuera $l > 0$, como $0 < q < 1$, se tendría que $(l/q) > l$, y en consecuencia l/q no sería una cota inferior del conjunto $\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, es decir, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$q^m < \frac{l}{q}, \quad \text{o bien} \quad q^{m+1} < l,$$

lo que contradiría que l es el ínfimo citado. Se verifica, pues, que $\inf\{q^n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

4) Si $q < 0$, la sucesión (q^n) no es monótona.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica:

$$q^{2n-1} < q^{2n} \quad \text{y} \quad q^{2n} > q^{2n+1},$$

y por tanto la sucesión (q^n) no es creciente y no es decreciente.

Una sucesión creciente es convergente si está acotada superiormente, y tiene límite más infinito si no lo está

Proposición V.22 *Dada una sucesión de números reales creciente, si está acotada superiormente, entonces es convergente y su límite es el supremo del conjunto de sus términos; si no está acotada superiomente, entonces tiende a más infinito.*

Demostración Sea (a_n) una sucesión creciente que está acotada superiormente, es decir, el conjunto $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, y por tanto admite un supremo, s.

Fijemos $\epsilon > 0$. Entonces $s - \epsilon$ no es cota superior del conjunto $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$, y por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s - \epsilon < a_k \leqslant s$, y como la sucesión es creciente podemos escribir:

$$\forall\, n \geqslant k,\ s - \epsilon < a_k \leqslant a_n \leqslant s.$$

En consecuencia, para $\epsilon > 0$ fijado, hemos encontrado un número natural k tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (s - \epsilon, s + \epsilon),$$

y por tanto: $s = \lim (a_n)$.

Si la sucesión (a_n) no está acotada superiomente, entonces, si fijamos $r \in \mathbb{R}$, existe un número natural k tal que $a_k > r$, y como la sucesión (a_n) es creciente, podemos escribir:

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \geqslant a_k > r,$$

y en consecuencia: $\lim (a_n) = +\infty$.

Mutatis mutandis se demostraría la siguiente

Una s. decreciente es convergente si está acotada inferiormente, y tiene límite menos infinito si no lo está

Proposición V.23 *Dada una sucesión de números reales decreciente, si está acotada inferiormente, entonces es convergente y su límite es el ínfimo del conjunto de sus términos; si no está acotada inferiormente, entonces tiende a menos infinito.*

Más propiedades de la sucesión geométrica Como consecuencia de las proposiciones anteriores, se tienen estas propiedades de la sucesión geométrica (q^n):

1) *Si* $q > 1$, *entonces* $\lim (q^n) = +\infty$.
2) *Si* $q = 1$, *entonces* $\lim (q^n) = 1$.
3) *Si* $0 < |q| < 1$, *entonces* $\lim (q^n) = 0$.
   De $0 < |q| < 1$ se deduce que $\lim (|q|^n) = 0$, o bien: $\lim (|q^n|) = 0$, y por tanto (cf. proposición V.8, p. 332): $\lim (q^n) = 0$.
4) *Si* $q = -1$, *entonces la sucesión* (q^n) *no es convergente.*
   Pues sus subsucesiones (q^{2n}) y (q^{2n-1}), respectivamente, son:

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots, \quad \text{y} \quad -1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots,$$

las cuales, aunque convergen, lo hacen a números diferentes (cf. proposición V.6, p. 330).

5) Si $q < -1$, entonces la sucesión (q^n) no es convergente.
En este caso, $|q| > 1$, y $\lim(|q|^n) = +\infty$, y por tanto la sucesión (q^n) no es convergente, ya que si lo fuera, lo mismo acontecería con la sucesión $(|q|^n)$ (cf. corolario de la proposición V.10, p. 332).

Podemos resumir lo visto sobre la sucesión geométrica (q^n) de razón q en el siguiente cuadro:

Sobre la sucesión geométrica (q^n)

$q \leqslant -1$	no es convergente
$0 < \|q\| < 1$	converge a 0
$q = 1$	constante
$q > 1$	tiende a $+\infty$

V.5 SERIES DE NÚMEROS REALES

Serie de números reales

1. Definición de serie Dada una sucesión (a_n) de números reales, se denomina **serie de término general** a_n a la sucesión (S_n), donde:

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

De la sucesión (S_n) también diremos es la serie **asociada** a la sucesión (a_n).

EJEMPLO 37 La serie de término general:

$$\frac{1}{n+1},$$

Serie armónica

o lo que es lo mismo: la serie asociada a la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)$, que se denomina **serie armónica**, es la sucesión (S_n) donde:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

EJEMPLO 38 Serie geométrica

De la serie asociada a la sucesión geométrica (q^n), o bien: de la serie de término general q^n (con $q \neq 0$), diremos es la **serie geométrica de razón** q; es decir, la serie geométrica de razón q es la sucesión (S_n) donde:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

La serie geométrica de razón 1 es la serie (S_n) asociada a esta sucesión constante:

$$1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$

es decir: $S_n = n + 1$ para cada n. La serie geométrica de razón -1 es la serie (S_n) asociada a esta sucesión:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots,$$

esto es: $S_{2n} = 1$ y $S_{2n+1} = 0$ para cada n.

2. *Series convergentes* Sea (a_n) una sucesión de números reales, y sea (S_n) su serie asociada. Si la sucesión (S_n) converge a un número real S, es decir:

$$\text{lím}\,(S_n) = S, \quad \text{o bien } \text{lím}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p\right) = S,$$

Serie convergente; suma de una serie

de la serie (S_n) diremos es **convergente**, y de **suma** S, y escribiremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Serie divergente

Si la sucesión (S_n) es no convergente, de la serie (S_n) diremos es **divergente**.

EJEMPLO 39 Estudiemos la convergencia o divergencia de la serie geométrica de razón q (cf. ejemplo 38) según los distintos valores de q:

- Si $q = 1$, la serie geométrica se reduce, como vimos en el citado ejemplo 38, a la sucesión $(n + 1)$, que es no convergente. La serie geométrica de razón 1 es, pues, divergente.
- Si $q = -1$, de lo visto en el ejemplo 38 sabemos que la serie geométrica admite una subsucesión que converge a 1 y otra que converge a 0; en consecuencia (cf. proposición V.6, p. 330) es no convergente. En conclusión, la serie geométrica de razón -1 es divergente.
- Supongamos que $0 < |q| < 1$. Entonces $q \neq 1$, y la serie geométrica (S_n) (cf. anexo de este capítulo, p. 361) verifica:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, la sucesión (q^{n+1}) converge a 0, pues es una subsucesión de la sucesión geométrica (q^n) y estamos en el caso $0 < |q| < 1$ (cf. p. 349). En consecuencia (cf. proposición V.11, p. 333):

$$\text{lím}\,(S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

De esta forma, concluimos: si $0 < |q| < 1$, la serie de geométrica de razón q es convergente, y de suma $1/(1 - q)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

- Si $|q| > 1$, demostraremos (cf. anexo, p. 361) que la sucesión $(|S_n|)$ tiende a más infinito, y por tanto la sucesión (S_n) es no convergente. Es decir: si $|q| > 1$, la serie geométrica de razón q es divergente.

Nota Se puede demostrar que la serie armónica (cf. ejemplo 37) es divergente. ▲

EJERCICIO 14 *Sea (A_n) la serie asociada a una sucesión (a_n) de números reales. Probar que una condición necesaria, pero no suficiente, para que la serie (A_n) sea convergente es:* $\lim(a_n) = 0$. ▲

Admitimos sin demostración la siguiente

> **Proposición V.24** *Sea (a_n) una sucesión de números reales. Si la serie de término general $|a_n|$ es convergente, entonces la serie de término general a_n también es convergente.*

EJERCICIO 15 *Dado un número natural k, demostrar que la serie asociada a una sucesión (u_n) de números reales es convergente si y sólo si la serie asociada a la sucesión (u_{n+k}) es convergente.* ▲

> **Proposición V.25** *Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales tales que:*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$
>
> *entonces:*
>
> *a) si la serie de término general b_n es convergente, la serie de término general a_n también es convergente;*
>
> *b) si la serie de término general a_n es divergente, la serie de término general b_n también es divergente.*

Demostración Sean (A_n) y (B_n) las series cuyos términos generales son a_n y b_n, respectivamente; es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \quad \text{y} \quad B_n = \sum_{p=0}^{n} b_p.$$

De la hipótesis se deduce:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n \leqslant B_n, \tag{17}$$

y también que (A_n) y (B_n) son sucesiones crecientes.

a) Si la serie de término general b_n es convergente, es decir, la sucesión (B_n) es convergente, sea $B = \lim(B_n)$. Entonces (cf. proposición V.22, p. 349): $B = \sup\{B_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ y de acuerdo con (17):

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n \leqslant B_n \leqslant B,$$

luego la sucesión (A_n) está acotada superiormente; como además es creciente, es convergente (cf. proposición V.22, p. 349). Es decir, la serie (A_n), de término general a_n es convergente.

b) Si la serie de término general a_n es divergente, entonces la sucesión (A_n) no está acotada superiormente (pues en caso contrario, como es monótona creciente, sería convergente). Pero si la sucesión (A_n) no está acotada superiormente, de (17) deducimos que la sucesión (B_n) tampoco lo está, y por tanto es no convergente. Esto es, la serie de término general b_n es divergente.

Como consecuencia de esta proposición y del ejercicio 15, se tiene el siguiente

Comparación de series

Corolario *Si k es un número natural y las sucesiones de números reales (a_n) y (b_n) verifican:* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_{n+k} \leqslant b_{n+k}$, *o lo que es lo mismo:*

$$\forall\, n \geqslant k,\ 0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

entonces:

a) si la serie de término general b_n es convergente, la serie de término general a_n también es convergente;

b) si la serie de término general a_n es divergente, la serie de término general b_n también es divergente.

3. Criterios de convergencia A continuación, estudiamos dos criterios de convergencia de series muy utilizados.

Criterio de d'Alembert

Proposición V.26 *Sea (a_n) una sucesión de números reales distintos de 0 tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l, \quad \text{con } l \geqslant 0.$$

Entonces se verifica:

- *si $l < 1$, la serie de término general $|a_n|$ es convergente, y por tanto también la serie de término general a_n es convergente;*
- *si $l > 1$, la serie de término general a_n es divergente.*

Demostración En el caso $l < 1$, sea $l < q < 1$. Entonces, para $\epsilon = q - l$, existe un número natural k tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l + \epsilon = q.$$

Sea $C = |a_k|\, q^{-k}$. Entonces:

$$|a_{k+1}| \leqslant q\,|a_k| \leqslant Cq^{k+1}, \quad |a_{k+2}| \leqslant q\,|a_{k+1}| \leqslant Cq^{k+2},$$

y por recurrencia se prueba: $\forall\, n \geqslant k,\ |a_n| \leqslant Cq^n$. Como la serie de término general Cq^n es convergente (cf. ejemplo 39, p. 351, y proposición V.11, p. 333), se deduce (cf. corolario de la proposición V.25) que también la serie de término general $|a_n|$ es convergente, y por tanto (cf. proposición V.24) que lo es la de término general a_n.

Si $l > 1$, análogamente probaríamos la existencia de un número natural k tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{o bien} \quad \forall\, n \geqslant k,\ |a_{n+1}| > |a_n|,$$

luego no puede converger a 0 la sucesión $(|a_n|)$, y por tanto tampoco la sucesión (a_n), y en consecuencia (cf. ejercicio 14) su serie asociada es divergente. C.Q.D.

EJEMPLO 40 Según los valores del número real $\alpha \neq 0$, estudiemos la convergencia de la serie asociada a la sucesión (a_n), donde:

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Se tiene:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha^n}\right| = \frac{|\alpha|}{n+1},$$

y por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1} = 0 < 1.$$

De acuerdo con el criterio de D'ALEMBERT, la serie asociada a la sucesión $(\alpha^n/(n!))$ es entonces convergente para cualquier valor del número real α.

Nota Si al aplicar el criterio de convergencia de D'ALEMBERT a la serie de término general a_n obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1,$$

entonces no podemos concluir que la serie sea convergente o que sea divergente. ▲

Criterio de Cauchy

Proposición V.27 *Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que:*[16]

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l, \quad \text{con } l \geqslant 0.$$

Entonces se verifica:

- *si $l < 1$, la serie de término general $|a_n|$ es convergente, y por tanto también la serie de término general a_n es convergente;*
- *si $l > 1$, la serie de término general a_n es divergente.*

Demostración En el caso $l < 1$, sea $l < q < 1$. Si fijamos $\epsilon = q - l$, entonces existe un número natural k no nulo tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ \sqrt[n]{|a_n|} < l + \epsilon = q,$$

y por tanto: $\forall\, n \geqslant k$, $|a_n| < q^n$; como la serie de término general q^n es convergente (cf. ejemplo 39, p. 351), se deduce (cf. corolario de la proposición V.25) que la serie de término general $|a_n|$ es convergente, y por tanto también la de término general a_n.

Sea ahora $l > 1$. Si fijamos $\epsilon = l - 1$, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ \sqrt[n]{|a_n|} > l - \epsilon = 1,$$

o bien: $\forall\, n \geqslant k$, $|a_n| > 1$, y por tanto la sucesión (a_n) no puede converger a 0, y en consecuencia (cf. ejercicio 14) la serie de término general a_n es divergente. □

[16]Si $n \in \mathbb{N}^*$, admitiremos que para cada $x \geqslant 0$ existe un único número real $b \geqslant 0$ tal que $b^n = x$. Se denota: $b = \sqrt[n]{x}$.

EJEMPLO 41 Estudiemos, según los valores del número real α, la convergencia de la serie asociada a la sucesión $(a_n; n \geqslant 1)$, donde:

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n^n}.$$

Se tiene:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^n}{n^n}\right|} = \frac{|\alpha|}{n},$$

y $\lim(|\alpha|/n) = 0 < 1$. De acuerdo con el criterio de CAUCHY, la serie asociada a la sucesión $(\alpha^n/n^n; n \geqslant 1)$ es convergente cualquiera que sea el número real α.

Nota Análogamente a como sucedía con el criterio de D'ALEMBERT, si al aplicar el criterio de CAUCHY se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

entonces no podemos deducir si la serie asociada a la sucesión (a_n) es convergente o divergente. ▲

V.6 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 310) Donde corresponde, hacemos referencia a las propiedades (a) y (b) escritas en el texto:

(C1) $(x \leqslant y \text{ y } x' \leqslant y') \Longrightarrow (x + x' \leqslant y + y')$:

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} (x \leqslant y) \overset{(a)}{\Longrightarrow} (x + x' \leqslant y + x') \\ \text{y} \\ (x' \leqslant y') \overset{(a)}{\Longrightarrow} (x' + y \leqslant y' + y) \end{array}\right\} \Longrightarrow (x + x' \leqslant y + y').$$

(C2) $(x \leqslant y) \Longrightarrow (-y \leqslant -x)$:

Hacemos $z = -x - y$ en (a):

$$(x \leqslant y) \Longrightarrow \big(x + (-x - y) \leqslant y + (-x - y)\big) \Longrightarrow (-y \leqslant -x).$$

(C3) $(x \leqslant y \text{ y } x' < y') \Longrightarrow (x + x' < y + y')$:

La implicación que queremos probar es equivalente a esta:

$$(y + y' \leqslant x + x') \Longrightarrow \begin{cases} y < x \\ \quad \text{o} \\ y' \leqslant x'. \end{cases}$$

Supongamos se verifica que $y + y' \leqslant x + x'$. Si no ocurre que $y < x$, entonces $x \leqslant y$, de donde: $-y \leqslant -x$, y en consecuencia:

$$(-y \leqslant -x \text{ y } y + y' \leqslant x + x') \overset{(C1)}{\Longrightarrow} (y' \leqslant x');$$

en otras palabras, si no ocurre que $y < x$, acontece entonces que $y' \leqslant x'$. La implicación es, pues, verdadera, y también la del enunciado.

(C4) $(x < y \text{ y } z > 0) \Longrightarrow (xz < yz)$:

Con (b) deducimos que $xz \leqslant yz$. Pero no puede ocurrir que xz sea igual a yz, ya que en este caso se tendría que $(x - y)z$ sería nulo, lo cual no es posible, pues $x - y \neq 0$ y $z \neq 0$.

(C5) $(x < y) \Longrightarrow \left(x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$:

Como $x \leqslant x$ y $y \leqslant y$, con (C3) deducimos:

$$(x < y) \Longrightarrow \begin{cases} x + x < y + x \\ \text{y} \\ x + y < y + y \end{cases} \Longrightarrow (2x < x + y < 2y),$$

y con (C4) (haciendo $z = 1/2$) obtenemos la implicación que queremos probar.

Ejercicio 2 (p. 315) Si A designa el conjunto (a, b), se tiene: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, luego b es una cota superior de A. Además no hay otro número menor que siga siendo cota superior de A. En efecto, si y es un número menor que b: $y < b$, entonces: o bien $y \leqslant a$, con lo que y ya no es cota superior de A, o bien $y \in A$, pero entonces podemos escribir:

$$\frac{y+b}{2} \in A \quad \text{y} \quad y < \frac{y+b}{2} < b,$$

y tampoco en este caso y es cota superior de A. Si b es una cota superior del conjunto A y es la menor de sus cotas superiores, se tiene que b es el supremo del conjunto A.

Análogamente se demostraría que $\sup\,(a, b] = b$.

Ejercicio 3 (p. 315) Todo intervalo no vacío A que esté acotado superiormente es de una de las seis siguientes formas:

$$[a, b], \quad (a, b], \quad (-\infty, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad \text{o} \quad (-\infty, b).$$

donde $a \neq b$. De acuerdo con el ejercicio 2, en todos los casos se tiene: $b = \sup A$. Si A es de una de las tres primeras formas, entonces: $A \cup \{\sup A\} = A$; y si es de alguna de las otras tres, al unirle $\{b\}$ se obtiene alguna de las tres primeras (en concreto: $[a, b) \cup \{b\} = [a, b]$, $(a, b) \cup \{b\} = (a, b]$ y $(-\infty, b) \cup \{b\} = (-\infty, b]$). En cualquiera de los casos, el conjunto $A \cup \{\sup A\}$ es un intervalo.

Ejercicio 4 (p. 316) El número $\text{máx}\{x, y\}$ es igual a uno de los números x o y, y $\text{mín}\{x, y\}$ es igual al otro. Por tanto:

$$\text{máx}\{x, y\} + \text{mín}\{x, y\} = x + y. \tag{18}$$

Por otro lado:

$$\text{máx}\{x, y\} - \text{mín}\{x, y\} = y - x = |y - x|, \quad \text{si } x \leqslant y,$$

$$\text{máx}\{x, y\} - \text{mín}\{x, y\} = x - y = |x - y|, \quad \text{si } y \leqslant x,$$

y por tanto: $\text{máx}\{x, y\} - \text{mín}\{x, y\} = |x - y|$. Sumando miembro a miembro con (18), obtenemos:

$$2\,\text{máx}\{x, y\} = (x + y) + |x - y|, \quad \text{o bien} \quad \text{máx}\{x, y\} = \frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2};$$

y restando miembro a miembro:

$$2\,\text{mín}\{x, y\} = (x + y) - |x - y|, \quad \text{o bien} \quad \text{mín}\{x, y\} = \frac{x + y}{2} - \frac{|x - y|}{2}.$$

Ejercicio 5 (p. 320) Supongamos que el conjunto abierto y no vacío A está acotado superiormente. Denotemos por s su supremo. Si ocurriera que s es un punto de A, como A es abierto, existiría un intervalo abierto (a, b) tal que: $s \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq A$. Pero si $s \in (a, b)$, podríamos deducir la existencia de algún $s' \in (a, b)$ (y por tanto $s' \in A$) de modo que $a < s < s' < b$, lo cual contradiría que s es el supremo de A.

El caso en que el conjunto A está acotado inferiormente es análogo.

Ejercicio 6 (p. 321) Supongamos que el conjunto cerrado y no vacío C está acotado superiormente. Pongamos $s = \sup C$. En particular: $(s, +\infty) \subseteq C^c$. Si s no perteneciera a C, es decir, si s fuera un elemento de C^c, como C^c es abierto, existiría un intervalo abierto (a, b) de modo que: $a < s < b$ y $(a, b) \subseteq C^c$, y en consecuencia: $(a, +\infty) = (a, b) \cup (s, +\infty) \subseteq C^c$, lo que establecería que a es una cota superior de C, en contradicción con que s es la mínima de sus cotas superiores.

El caso en que el conjunto C está acotado inferiormente es análogo.

Ejercicio 7 (p. 321) Sea A un conjunto de números reales que es, simultáneamente, abierto y cerrado (y, por tanto, también A^c es, simultáneamente, abierto y cerrado). Supongamos que A es no vacío. Probemos que entonces debe coincidir A con $\mathbb{R}$.

Sea $a \in A$. Entonces se verifica que es vacío este conjunto:

$$B = A^c \cap (-\infty, a) = A^c \cap (-\infty, a].$$

En efecto: si B no fuera vacío, como está acotado superiormente por a, admitiría supremo: $\sup B$; ahora bien, como $B = A^c \cap (-\infty, a)$ es abierto (pues es la intersección de dos conjuntos abiertos), se tendría (cf. ejercicio 5): $\sup B \notin B$; pero $B = A^c \cap (-\infty, a]$ es cerrado (por ser intersección de conjuntos cerrados), luego también se tendría (cf. ejercicio 6): $\sup B \in B$, lo que lleva a absurdo. Debemos suponer, pues, que B es vacío.

Análogamente se demostraría que también es vacío este conjunto:

$$D = A^c \cap (a, +\infty) = A^c \cap [a, +\infty).$$

Finalmente, como: $B \cup D = (A^c \cap (-\infty, a)) \cup (A^c \cap [a, +\infty)) = A^c$, concluimos que A^c es vacío, es decir: $A = \mathbb{R}$.

Ejercicio 8 (p. 330) Sea (a_n) una sucesión convergente, con $\text{lím}\,(a_n) = l$. Si fijamos $\varepsilon = 1$, de la definición de convergencia se deduce la existencia de un número natural k tal que:

$$\forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (l-1, l+1).$$

Si $k = 0$, esta condición afirma directamente que la sucesión (a_n) está acotada; pero si $k \geqslant 1$, definimos:

$$M = \text{máx}\,\{l+1, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\} \quad \text{y} \quad m = \text{mín}\,\{l-1, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\},$$

y podemos escribir: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ m \leqslant a_n \leqslant M$, lo cual nos señala que la sucesión (a_n) también en este caso está acotada.

Ejercicio 9 (p. 334) Sabemos (cf. ejercicio 4, p. 316) que

$$u_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{|a_n - b_n|}{2} \quad \text{y} \quad v_n = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{|a_n - b_n|}{2}. \tag{19}$$

La sucesión $(a_n + b_n)$ es convergente, y su límite es $a + b$ (cf. proposición V.11, p. 333); la sucesión $(|a_n - b_n|)$ también es convergente, y su límite es $|a - b|$ (cf. corolario de la proposición V.10, p. 332). En consecuencia, de (19) se deduce que las sucesiones (u_n) y (v_n) son ambas convergentes, y

$$\text{lím}\,(u_n) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \text{máx}\{a, b\},$$

$$\text{lím}\,(v_n) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \text{mín}\{a, b\}.$$

Ejercicio 10 (p. 335) Si (a_n) una sucesión que tiende a más infinito, y b es un número real, entonces todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que algún $k \geqslant 1$ son mayores que b; el número $\text{mín}\{b, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ es cota inferior de la sucesión (a_n).

Ejercicio 11 (p. 341) La sucesión $(-c_n)$ converge a $-l$ (cf. proposición V.11, p. 333), y $-l > 0$, luego (cf. corolario de la proposición V.15, p. 337) la sucesión $(a_n(-c_n))$ tiende a más infinito, y por tanto: $\text{lím}\,(a_n c_n) = -\infty$.

La sucesión $(-b_n)$ tiende a más infinito; teniendo en cuenta lo demostrado en el párrafo anterior: $\text{lím}\,((-b_n)c_n) = -\infty$, y en consecuencia: $\text{lím}\,(b_n c_n) = +\infty$.

Ejercicio 12 (p. 341) Como $\text{lím}\,(a_n) = -\infty$ y $\text{lím}\,(b_n) = -\infty$, se tiene: $\text{lím}\,(-a_n) = +\infty$ y $\text{lím}\,(-b_n) = +\infty$, y por tanto (cf. corolario de la proposición V.15, p. 337):

$$\text{lím}\,(a_n b_n) = \text{lím}\,((-a_n)(-b_n)) = +\infty.$$

Ejercicio 13 (p. 346) Dado un número real x, podemos escribir:

$$x \text{ es interior a } B \iff \exists\ (a,b)\,, \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \subseteq B \end{cases}$$

$$\iff \exists\ (a,b)\,, \begin{cases} x \in (a,b) \\ \text{y} \\ (a,b) \cap B^c = \emptyset \end{cases} \iff x \text{ no es adherente a } B^c,$$

es decir: x es interior a B precisamente si x no es adherente a B^c. En consecuencia, el complementario del conjunto $\overline{B^c}$ es precisamente el conjunto $\mathring{B}$, esto es:

$$B^{c-c} = (\overline{B^c})^c = \mathring{B}.$$

Ejercicio 14 (p. 352) Si la sucesión (A_n) es convergente, entonces la sucesión (A_{n+1}) también es convergente y tiene el mismo límite (cf. proposición V.7, p. 331), y por tanto:

$$\text{lím}\,(A_{n-1} - A_n) = 0;$$

pero: $A_{n+1} - A_n = a_{n+1}$, luego: $\text{lím}\,(a_{n+1}) = \text{lím}\,(a_n) = 0$.

La condición no es, efectivamente, suficiente. Por ejemplo, la sucesión $(1/(n+1))$ converge a 0, y sin embargo la serie asociada a ella: la serie armónica, es divergente (cf. nota de la p. 351).

Ejercicio 15 (p. 352) Para evitar trivialidades supondremos que $k \geqslant 1$. Se tiene:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad \text{y} \quad S'_n = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n},$$

y por tanto: $S_{n+k} = S_{k-1} + S'_n$. De esta forma, la sucesión (S_{n+k}) es convergente precisamente si lo es la sucesión (S'_n) (obsérvese que S_{k-1} es constante: no depende de n). Como la sucesión (S_n) es convergente cuando y sólo cuando lo es la sucesión (S_{n+k}) (cf. corolario de la proposición V.7, p. 331), se concluye que la sucesión (S_n) es convergente si y sólo lo es la sucesión (S'_n).

V.7 ANEXO

1. Operaciones con sucesiones convergentes Demostramos aquí la proposición V.11 (cf. p. 333). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes, de límites respectivos a y b.

1) *Si α y β son dos números reales, entonces la sucesión $(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente, y* $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$.

Si los números reales α y β son simultáneamente nulos, entonces $(\alpha a_n + \beta b_n)$ es la sucesión con todos los términos iguales a 0, y esta sucesión converge a 0.

Por el contrario, supongamos que α y β no son simultáneamente nulos, y fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, y considerando el número real positivo $\epsilon/(|\alpha| + |\beta|)$, como la sucesión (a_n) converge a a, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geqslant k_1,\ |a - a_n| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|},$$

y como la sucesión (b_n) converge a b, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geqslant k_2,\ |b - b_n| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}.$$

Por tanto, si $n \geqslant \text{máx}\{k_1, k_2\}$, se verifica:

$$|a - a_n| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}. \tag{20}$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene (cf. propiedades del valor absoluto, p. 315):

$$\begin{aligned} |\alpha a + \beta b - (\alpha a_n + \beta b_n)| &= |\alpha(a - a_n) + \beta(b - b_n)| \\ &\leqslant |\alpha(a - a_n)| + |\beta(b - b_n)| \\ &= |\alpha|\,|a - a_n| + |\beta|\,|b - b_n|, \end{aligned}$$

y si $n \geqslant \text{máx}\{k_1, k_2\}$, de (20) se deduce:

$$|\alpha a + \beta b - (\alpha a_n + \beta b_n)| < |\alpha| \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} + |\beta| \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} = \epsilon.$$

En conclusión: habiendo fijado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ —nos sirve $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$— tal que: $\forall\, n \geqslant k,\ |\alpha a + \beta b - (\alpha a_n + \beta b_n)| < \epsilon$. Es decir, la sucesión $(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge a $\alpha a + \beta b$.

2) *La sucesión $(a_n b_n)$ es convergente, y* $\lim(a_n b_n) = ab$.

En efecto. Como la sucesión (a_n) es convergente, también lo es la sucesión $(|a_n|)$ (cf. corolario de la proposición V.10, p. 333), y por tanto está acotada superiormente por algún número real $C > 0$ (cf. ejercicio 8, p. 330): $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant C$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica (cf. propiedades del valor absoluto, p. 315):

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| = |b(a - a_n) + a_n(b - b_n)| \\ &\leqslant |b(a - a_n)| + |a_n(b - b_n)| = |b|\,|a - a_n| + |a_n|\,|b - b_n| \\ &\leqslant |b|\,|a - a_n| + C\,|b - b_n|, \end{aligned}$$

es decir:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |ab - a_n b_n| \leqslant |b|\,|a - a_n| + C\,|b - b_n|. \tag{21}$$

De acuerdo con la propiedad anterior (linealidad), vemos que converge a 0 la sucesión $(|b|\,|a-a_n|+C\,|b-b_n|)$, pues las sucesiones $(|a-a_n|)$ y $(|b-b_n|)$ convergen a 0. De (21) se infiere que la sucesión $(|ab-a_nb_n|)$ también converge a 0, o lo que es lo mismo: la sucesión (a_nb_n) converge a ab: $\lim(a_nb_n)=ab$.

3) *Si* $b\neq 0$, *entonces* $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{a}{b}$.

La sucesión $(|b_n|)$ converge al número positivo $|b|$, y por tanto, considerando el número positivo $|b|/2$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para cada $n\geqslant n_0$ se tiene:

$$|b_n|\in\left(|b|-\frac{|b|}{2},|b|+\frac{|b|}{2}\right),\quad\text{o bien}\quad \frac{|b|}{2}<|b_n|<\frac{3\,|b|}{2},$$

de donde:

$$\forall\, n\geqslant n_0,\ |b_n|>\frac{|b|}{2}>0; \tag{22}$$

en consecuencia: $\forall\, n\geqslant n_0$, $b_n\neq 0$, y la sucesión $\left(\dfrac{a_n}{b_n};n\geqslant n_0\right)$ está bien definida. De acuerdo con (22), para cada $n\geqslant n_0$ se verifica:

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{a_n}{b_n}\right|=\frac{|ab_n-a_nb|}{|b|\,|b_n|}<\frac{|ab_n-a_nb|}{|b|\,(|b|/2)}=\frac{2}{b^2}\,|ab_n-a_nb|. \tag{23}$$

Pero la sucesión $(|ab_n-a_nb|;n\geqslant n_0)$ es subsucesión de la sucesión $(|ab_n-a_nb|)$, la cual converge a $ab-ab=0$ (por linealidad). Por tanto: $\lim(|ab_n-a_nb|)=0$, y de (23) se infiere:

$$\lim\left(\left|\frac{a}{b}-\frac{a_n}{b_n}\right|\right)=0,$$

y en conclusión la sucesión $(a_n/b_n;n\geqslant n_0)$ converge a a/b: $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{a}{b}$.

2. *Sobre la serie geométrica* Si q es un número real distinto de 1, y (S_n) es la serie geométrica de razón q, se verifica:

$$S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

En efecto, se tiene: $S_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$, y podemos escribir:

$$\begin{aligned}S_n-qS_n&=(1+q+q^2+\cdots+q^n)-q(1+q+q^2+\cdots+q^n)\\&=(1+q+q^2+\cdots+q^n)-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1})=1-q^{n+1},\end{aligned}$$

de donde (considerando que $q\neq 1$): $S_n=(1-q^{n+1})/(1-q)$.

Con las mismas notaciones, si $|q|>1$, entonces: $\lim(|S_n|)=+\infty$. En efecto. Si (T_n) es la serie asociada a la sucesión geométrica de razón q^{-1}:

$$T_n=1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots+\frac{1}{q^n},$$

se verifica: $S_n = q^n T_n$, de donde: $|S_n| = |q|^n |T_n|$. Dado que $|q| > 1$, resulta (cf. p. 349): $\text{lím}\,(|q|^n) = +\infty$; y dado que $|q^{-1}| < 1$, resulta (cf. ejemplo 39, p. 351):

$$\text{lím}\,(|T_n|) = \left|\frac{1}{1-q^{-1}}\right|,$$

que es un número positivo. Con el corolario de la proposición V.15 (cf. p. 337), se concluye: $\text{lím}\,(|S_n|) = +\infty$.

RECAPITULACIÓN V

El conjunto de los numeros reales Recuérdese que $\mathbb{R}$ designa el **conjunto de los números reales**:

- Existe una correspondencia biyectiva entre los números reales y los puntos de una recta cuando en ésta se fijan un origen y una unidad orientada.
- El conjunto de los números reales, dotado de las operaciones adición y multiplicación, tiene estructura de **cuerpo conmutativo.**

  Elemento neutro de la suma: 0. Opuesto del número real x: $-x$.

  Elemento neutro de la multiplicación: 1. Inverso del número real x no nulo $(x \neq 0)$: $1/x$.
- La relación $\leqslant$ es una **relación de orden total** en $\mathbb{R}$.

  La notación $x \leqslant y$ se lee: "x es menor o igual que y". La negación de $x \leqslant y$ se denota: $y < x$, que se lee: "y es menor que x".

  La relación $x \leqslant y$ es **compatible** con la suma: $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$, y con la multiplicación: $(x \leqslant y \text{ y } z \geqslant 0) \Rightarrow (xz \leqslant yz)$.

  Consecuencias:
  - ◇ $(x \leqslant y \text{ y } x' \leqslant y') \Longrightarrow (x + x' \leqslant y + y')$;
  - ◇ $(x \leqslant y) \Longrightarrow (-y \leqslant -x)$;
  - ◇ $(x \leqslant y \text{ y } x' < y') \Longrightarrow (x + x' < y + y')$;
  - ◇ $(x < y \text{ y } z > 0) \Longrightarrow (xz < yz)$;
  - ◇ $(x < y) \Longrightarrow \left(x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$.
- Se considera un conjunto A de números reales (esto es: $A \subseteq \mathbb{R}$):
  - ◇ El conjunto A está **acotado superiormente** si: existe $b \in \mathbb{R}$ que es mayor o igual que cada uno de los elementos de A.

    De b se dice: b es una **cota superior** del conjunto A.
  - ◇ El conjunto A está **acotado inferiormente** si: existe $b \in \mathbb{R}$ que es menor o igual que cada uno de los elementos de A.

    De b se dice: b es una **cota inferior** del conjunto A.
  - ◇ El conjunto A está **acotado** si: A está acotado superior e inferiormente.
  - ◇ El número real b es **máximo** del conjunto A si: b es una cota superior de A y $b \in A$.

    Se escribe: $b = \max A$.
  - ◇ El número real b es **mínimo** del conjunto A si: b es una cota inferior de A y $b \in A$.

    Se escribe: $b = \min A$.

- ◇ Si A está acotado superiormente y A no es vacío: existe el **supremo** de A: cota superior mínima de A.
  El supremo de A se denota: $\sup A$. En símbolos:
  $(\forall x \in A,\ x \leqslant b) \Leftrightarrow (\sup A \leqslant b)$.
- ◇ Si A está acotado inferiormente y A no es vacío: existe el **ínfimo** de A: cota inferior máxima de A.
  El ínfimo de A se denota: $\inf A$. En símbolos:
  $(\forall x \in A,\ a \leqslant x) \Leftrightarrow (a \leqslant \inf A)$.

Propiedades (A es no vacío):
- ◇ si A está acotado superiormente:
  $$(x < \sup A) \Rightarrow (\exists\, y \in A,\ x < y \leqslant \sup A);$$
- ◇ si A está acotado superiormente y $\sup A \in A$: $\sup A = \max A$;
- ◇ si A está acotado inferiormente y $\inf A \in A$: $\inf A = \min A$.
- ◇ **Propiedad arquimediana** de los números reales: si $y \geqslant 0$ y $x > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mx > y$.
  Si $x > 0$, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $(1/m) < x$.
- ◇ Si A no está acotado superiormente, se escribe: $\sup A = +\infty$.
  Condición necesaria y suficiente: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in A,\ x > b$.
- ◇ Si A no está acotado inferiormente, se escribe: $\inf A = -\infty$.

- **Intervalo** de números reales: cualquiera de los siguientes conjuntos (donde a y b son números reales tales que $a \leqslant b$):
  - ◇ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
  - ◇ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
  - ◇ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$;
  - ◇ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$;
  - ◇ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$;
  - ◇ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$;
  - ◇ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$;
  - ◇ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
  - ◇ $\mathbb{R}$;
  - ◇ $\emptyset$.

  Si $a = b$, entonces los intervalos (a, b), $(a, b]$ y $[a, b)$ representan el conjunto vacío: $\emptyset$.
  Se tiene: $[a, a] = \{a\}$.
  Intervalos acotados: los que son conjuntos acotados: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) y $\emptyset$.

- **Valor absoluto** de un número real x: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

  Propiedades:
  - ◇ $|xy| = |x|\,|y|$;
  - ◇ (**desigualdad triangular**) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
  - ◇ $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.
- Consideramos un conjunto A de números reales:
  - ◇ **Punto interior** de A (o interior a A): punto (o número real) x para el que existe un intervalo (a, b), con $a < b$, tal que: $x \in (a, b)$ y $(a, b) \subseteq A$.
  - ◇ **Interior** de A: conjunto de sus puntos interiores.
    Se denota: $\mathring{A}$.
    Propiedades:
    $\mathring{A} \subseteq A$;
    si $A \subseteq B$: $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.
  - ◇ Conjunto **abierto**: A es abierto significa: todos sus puntos son interiores: $A \subseteq A$.
    Un conjunto A es abierto precisamente si: $\mathring{A} = A$.
    La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
    La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
    Intervalos abiertos: los que son conjuntos abiertos:
    $$(a, b)\,, \quad (-\infty, b)\,, \quad (a, +\infty)\,, \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \emptyset.$$
  - ◇ Conjunto **cerrado**: un conjunto C de núneros reales es cerrado si: su complementario: $\mathbb{R} - C = C^c$, es abierto.
    La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
    La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
    Intervalos cerrados: los que son conjuntos cerrados:
    $$[a, b]\,, \quad (-\infty, b]\,, \quad [a, +\infty)\,, \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \emptyset.$$

Sucesiones de numeros reales

- **Sucesión de números reales**: aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.
  Se denota: $(a_n; n \in \mathbb{N})$, o también: (a_n) (donde a_n es la imagen del número natural n).
  Término de orden k de la sucesión (a_n): imagen del número natural k: a_k.
- La sucesión (a_n) está **acotada superiormente** si: existe $b \in \mathbb{R}$ tal que:
  $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b$.
  La sucesión (a_n) está **acotada inferiormente** si: existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:
  $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a \leqslant a_n$.
  La sucesión (a_n) está **acotada** si: está acotada superior e inferiormente.

- **Subsucesión** de una sucesión (a_n): una sucesión $(a_{\mathfrak{p}(n)})$, donde $\mathfrak{p}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente (es decir, verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathfrak{p}(n) < \mathfrak{p}(n+1)$).
  El término de orden k de la sucesión $(a_{\mathfrak{p}(n)})$ es: $a_{\mathfrak{p}(k)}$ (coincide con el término de orden $\mathfrak{p}(k)$ de la sucesión (a_n)).
  La sucesión (a_{n+k}) también se denota: $(a_n; n \geqslant k)$.
- La notación: $(f(n); n \geqslant k)$, donde $k \in \mathbb{N}$ y f es una aplicación del conjunto $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$ en $\mathbb{R}$, designa la sucesión siguiente: $(f(n+k))$.
- La sucesión (a_n) es **constante** si: todos sus términos son iguales a un mismo número $c \in \mathbb{R}$: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = c$. También diremos que (a_n) es constante si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = c$ para todo $n \geqslant n_0$.

Sucesiones convergentes. Límites infinitos Consideramos una sucesión de números reales (a_n):

- Que la sucesión (a_n) **converge** al número real l, o que l es **límite** de la sucesión (a_n), significa:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant k,\ a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$$

  (para cada $\epsilon > 0$ todos los términos de la sucesión, salvo posiblemente una cantidad finita, están en $(l-\epsilon, l+\epsilon)$).
  Se denota: $\operatorname{lím}(a_n) = l$, o también: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, que se lee: "el límite de la sucesión (a_n) cuando n tiende a infinito es l".
  Sucesión **convergente**: la que converge a algún número real.
  Sucesión **no convergente**: la que no converge a ningún número real.
- Propiedades de las sucesiones convergentes:
  - ◇ el límite de una sucesión convergente es único;
  - ◇ toda subsucesión de una sucesión convergente es una sucesión convergente que tiene el mismo límite;
  - ◇ toda sucesión convergente está acotada;
  - ◇ toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente;
  - ◇ la propiedad de convergencia a un límite es independiente de los k primeros términos de la sucesión: si la subsucesión $(a_n; n \geqslant k)$ es convergente, también lo es la sucesión (a_n) y el límite es el mismo; esto es: $\operatorname{lím}(a_n) = \operatorname{lím}(a_n; n \geqslant k)$;
  - ◇ $\operatorname{lím}(a_n) = l \Leftrightarrow \operatorname{lím}(a_n - l) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{lím}(|a_n - l|) = 0$;
  - ◇ si las sucesiones (a_n) y (b_n) verifican: $\forall\, n \geqslant n_0,\ |a_n| \leqslant |b_n|$ (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$), entonces: $\operatorname{lím}(b_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{lím}(a_n) = 0$;
  - ◇ si las sucesiones (a_n) y (b_n) convergen a a y a b, respectivamente:
    $\operatorname{lím}(|a_n|) = |a|, \quad \operatorname{lím}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b,$

$\lim(a_n b_n) = ab$, $\quad \lim(a_n/b_n) = a/b$ (si $b \neq 0$),
$\lim(P(a_n)) = P(a)$ (donde P es un polinomio);

- Que la sucesión (a_n) **tiende a más infinito** $(+\infty)$ significa: para cada $b \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k son mayores que b.
  En símbolos: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow a_n > b$.
  Se denota: $\lim(a_n) = +\infty$, o también: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.
- Que la sucesión (a_n) **tiende a menos infinito** $(-\infty)$ significa: para cada $b \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k son menores que b.
  En símbolos: $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k \Rightarrow a_n < b$.
  Se denota: $\lim(a_n) = -\infty$, o también: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.
- Propiedades de los límites infinitos:
  - si $\lim(a_n) = +\infty$ o $\lim(a_n) = -\infty$: la sucesión (a_n) no es convergente;
  - el límite de una sucesión es único, tanto si es finito como infinito;
  - condición necesaria y suficiente de límite más infinito: $\lim(a_n) = +\infty$ si y sólo si todos los términos de (a_n), salvo quizá una cantidad finita, son positivos y $\lim(1/a_n) = 0$;
  - condición necesaria y suficiente de límite menos infinito: $\lim(a_n) = -\infty$ si y sólo si todos los términos de (a_n), salvo quizá una cantidad finita, son negativos y $\lim(1/a_n) = 0$.
- Cuadro-resumen de propiedades para el cálculo de límites (cuando la sucesión (a_n) es convergente, a denota su límite; cuando lo es la sucesión (b_n), b denota su límite; '?' significa que no se puede asegurar nada de la sucesión correspondiente):

$\lim(a_n)$	$\lim(b_n)$	$\lim(a_n + b_n)$	$\lim(a_n b_n)$
a	b	$a+b$	ab
a	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, si $a > 0$ $-\infty$, si $a < 0$?, si $a = 0$
a	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$, si $a > 0$ $+\infty$, si $a < 0$?, si $a = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Límites y polinomios: si P es un polinomio de grado $p \geqslant 1$ y a_p es su coeficiente de grado p (es decir, el coeficiente de n^p):

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_p > 0, \\ -\infty, & \text{si } a_p < 0; \end{cases}$$

y si Q es un polinomio de grado $q \geqslant 1$ y b_q es su coeficiente de grado q:

p y q	$\lim\,(n^{p-q})$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$
$p > q$	$+\infty$	$+\infty$, si $\dfrac{a_p}{b_q} > 0$ $-\infty$, si $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$
$p = q$	$\lim\,(1) = 1$	$\dfrac{a_p}{b_q}$
$p < q$	0	0

- Consideramos un conjunto A no vacío de números reales y un número real a. El punto a es **punto adherente de** A significa: existe una sucesión cuyos términos son puntos de A y que converge a a.
  Adherencia de A: el conjunto de los puntos adherentes de A.
  Se denota: $\overline{A}$.
  Convenio: $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
  Propiedades:
  - ◇ $a \in \overline{A}$ precisamente si: cada intervalo no vacío, abierto y acotado, al que a pertenece contiene puntos de A;
  - ◇ dado un conjunto no vacío acotado superiormente: su supremo pertenece a su adherencia;
    dado un conjunto no vacío acotado inferiormente: su ínfimo pertenece a su adherencia;
  - ◇ $A \subseteq \overline{A}$ (todo punto de A es adherente a A);
  - ◇ $\overline{A}$ es cerrado;
  - ◇ una condición necesaria y suficiente para que A sea cerrado es: $A = \overline{A}$;
  - ◇ si $A \subseteq B$: $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
  - ◇ si los términos de una sucesión convergente son puntos de un conjunto cerrado, su límite pertenece al conjunto cerrado.

Sucesiones monotonas Consideramos una sucesión (a_n) de números reales:

- La sucesión (a_n) es **creciente** si: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1}$.

La sucesión (a_n) es **decreciente** si: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant a_{n+1}$.
La sucesión (a_n) es **estrictamente creciente** si: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$.
La sucesión (a_n) es **estrictamente decreciente** si: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$.
La sucesión (a_n) es **monótona** si: es creciente o es decreciente.

- Si (a_n) es creciente y está acotada superiormente, entonces es una sucesión convergente; si es creciente y no está acotada superiormente: $\lim (a_n) = +\infty$.
  Si (a_n) es decreciente y está acotada inferiormente, entonces es una sucesión convergente; si es decreciente y no está acotada inferiormente: $\lim (a_n) = -\infty$.
- Sucesión **geométrica** de razón q ($q \neq 0$): la sucesión (q^n).
  Propiedades:
  - si $q > 1$: $\lim (q^n) = +\infty$;
  - si $q = 1$: $\lim (q^n) = 1$;
  - si $0 < |q| < 1$: $\lim (q^n) = 0$;
  - si $q \leqslant -1$: la sucesión (q^n) no es convergente.

Series de números reales Consideramos una sucesión (a_n) de números reales:

- **Serie asociada** a la sucesión (a_n), o **serie de término general** a_n: la sucesión (S_n) donde $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
- Que la serie de término general a_n es **convergente**, y de **suma** S, significa: la sucesión (S_n) es convergente y de límite S; es decir: $\lim \left(\sum_{p=0}^{n} a_p \right) = S$.
  Se denota: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.
  Serie **divergente**: la que no es convergente.
  Si la serie asociada a una sucesión $(a_n; n \geqslant k)$ es convergente y de suma S, también se escribe: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = S$.
- Propiedades:
  - si la serie de término general $|a_n|$ es convergente, también lo es la de término general a_n;
  - una condición necesaria, pero no suficiente, para que la serie de término general a_n sea convergente es: $\lim (a_n) = 0$;
  - (comparación de series) suponemos que las sucesiones (a_n) y (b_n) son tales que: $\forall\, n \in \{k, k+1, \ldots\}$, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (para algún $k \in \mathbb{N}$):
    si la serie de término general b_n es convergente, también lo es la de término general a_n;
    si la serie de término general a_n es divergente, también lo es la de término general b_n;

◇ (criterio de convergencia de D'ALEMBERT) suponemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad \text{con } l \geqslant 0;$$

si $l < 1$: la serie de término general $|a_n|$ es convergente; si $l > 1$: la serie de término general a_n es divergente;

◇ (criterio de convergencia de CAUCHY) suponemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l, \quad \text{con } l \geqslant 0;$$

si $l < 1$: la serie de término general $|a_n|$ es convergente; si $l > 1$: la serie de término general a_n es divergente;

◇ la serie asociada a la sucesión $(1/n^2; n \geqslant 1)$ es convergente.

- Serie **armónica**: la asociada a la sucesión $(1/(n+1))$; es divergente.
- Serie **geométrica** de razón q ($q \neq 0$): la asociada a la sucesión geométrica de razón q.

  Propiedades:

  ◇ si $|q| \geqslant 1$: la serie geométrica de razón q es divergente;

  ◇ si $0 < |q| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

APÉNDICE A

PRELIMINARES

ESQUEMA – RESUMEN

A.1 CONJUNTOS

1. Primeras nociones sobre conjuntos El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de las Matemáticas.

Conjunto y elementos

Definimos intuitivamente un conjunto como una colección *bien definida* de objetos perfectamente diferenciados entre sí, que denominaremos **elementos** del conjunto.

Por "bien definida" entendemos: dados un conjunto y un objeto cualesquiera, podemos saber de forma inequívoca si el objeto es o no es elemento del conjunto.

El término *conjunto* fue introducido por CANTOR.[1]

EJEMPLO 1 Consideremos el conjunto cuyos elementos son las cifras de la numeración decimal:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

De la letra griega α podemos decir, sin lugar a dudas, que no es un elemento de este conjunto; en cambio, 5 sí es un elemento del conjunto.

EJEMPLO 2 Consideremos el conjunto cuyos elementos son las letras del alfabeto griego. En este caso, la letra α es un elemento de este conjunto; en cambio, 5 no lo es.

EJEMPLO 3 Pensemos ahora en las personas que figurarán en las listas del paro en el año 2020. ¿Podemos afirmar existe el conjunto cuyos elementos son estas personas?

No, pues en la actualidad no es posible saber si una persona determinada figurará o no en las listas del paro en el año 2020. Esta pequeña duda nos hace desechar que se trate de un conjunto.

Notación general para conjuntos Es usual designar los conjuntos con letras mayúsculas, y los elementos con letras minúsculas.

Pertenencia

> Si A es un conjunto y a es un elemento del conjunto A, se escribe:
>
> $$a \in A, \quad \text{o} \quad A \ni a,$$
>
> y se dice (en ambos casos): "a **pertenece** a A". Si a *no* es un elemento del conjunto A, se escribe:
>
> $$a \notin A, \quad \text{o} \quad A \not\ni a,$$
>
> y se dice (en ambos casos): "a **no pertenece** a A".

[1] Georg CANTOR (1845–1918), matemático alemán.

Conjuntos numéricos

Conjuntos numéricos Los conjuntos que más utilizamos en este texto son:

- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números **naturales**:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$

  Denotaremos por $\mathbb{N}^*$ el conjunto de los números naturales no nulos.
- El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números **enteros**: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$
- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números **racionales**: las fracciones p/q, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números **reales**: los números racionales no permiten medir cualquier cantidad o cualquier longitud relativa (por ejemplo, si d denota la longitud de la diagonal de un cuadrado, y l denota la longitud de su lado, la razón entre d y l no puede representarse como un cociente de números enteros); con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se "completan" los números racionales, de forma que con los números reales ya se puede representar cualquier medida.

  Denotaremos por $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales no nulos; por $\mathbb{R}_+$ el de los números reales positivos o nulos; y por $\mathbb{R}_+^*$, el de los números reales positivos.

Definición de un conjunto por extensión

Definición de un conjunto por extensión Si podemos escribir todos y cada uno de los elementos de un conjunto, se suelen escribir éstos entre llaves ('{' y '}') y separados por comas. Por ejemplo, si designamos con la letra A el conjunto de las cifras de la numeración decimal, escribimos:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Esta forma de definir —o representar— un conjunto, escribiendo explícitamente todos y cada uno de sus elementos, se denomina definición por **extensión**.

EJEMPLO 4 Si B es el conjunto de las vocales del alfabeto español, entonces podemos escribir:

$$B = \{\mathrm{a, e, i, o, u}\},$$

que es una definición (o representación) por extensión del conjunto B.

EJEMPLO 5 El símbolo $\{\{a, b\}\}$ representa por extensión el conjunto formado por el elemento $\{a, b\}$, el cual a su vez es otro conjunto (definido por extensión y formado por los elementos a y b). Se verifica:

$$a \notin \{\{a, b\}\} \quad \text{y} \quad \{a, b\} \in \{\{a, b\}\}.$$

El símbolo $\{a, \{b, c\}\}$ representa por extensión un conjunto con dos elementos: a y $\{b, c\}$.

Nota bene No debe confundirse el elemento a con el conjunto $\{a\}$ (formado por el único elemento a). ▲

Nota Ateniéndonos a la definición intuitiva de conjunto, que decía: "... objetos perfectamente diferenciados entre sí", no consideraremos como la representación de un conjunto un símbolo en el que figuren entre llaves elementos repetidos (por ejemplo: $\{a, a, b, c, d\}$); de un símbolo tal deberá suponerse es un error de imprenta. ▲

Conjuntos finitos. Cardinal Damos a continuación una definición provisional de conjunto finito, que más adelante sustituiremos por una rigurosa (cf. p. 398).

Conjunto finito

De los conjuntos que pueden ser representados por extensión diremos son **finitos**. Es decir, un conjunto finito es un conjunto que verifica que todos y cada uno de sus elementos pueden ser escritos explícitamente.

Conjunto infinito

De los conjuntos que no son finitos diremos son **infinitos**.

EJEMPLO 6 El conjunto A de las cifras de la numeración decimal es finito, así como el conjunto B de las vocales del alfabeto español (cf. ejemplo 4, p. 374).

Puede probarse que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, de los números naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente, son infinitos.

Cardinal de un conjunto

Si E es un conjunto finito, es posible contar sus elementos. A la cantidad de elementos de un conjunto finito E se le denomina **cardinal** de E, y se denota: $\mathrm{Card}(E)$.

EJEMPLO 7 Para el conjunto finito A de las cifras de la numeración decimal se tiene: $\mathrm{Card}(A) = 10$. Para el conjunto finto B de las vocales del alfabeto español (cf. ejemplo 4, p. 374), se tiene: $\mathrm{Card}(B) = 5$.

Definición de un conjunto por comprensión También se puede definir —o representar— un conjunto dando una propiedad que caracterice sus elementos, es decir, una propiedad que sea verificada por sus elementos y sólo por ellos. En tal caso diremos que el conjunto está definido —o representado— por **comprensión**.

Definición de un conjunto por comprensión

En la práctica, definiremos —o representaremos— un conjunto H por **comprensión** de la siguiente forma:

$$H = \{x \in E \mid x \text{ verifica la propiedad } \dots\}$$

—que se lee "H es el conjunto de los elementos x pertenecientes a E tales que x verifica la propiedad ..."—, donde E es un conjunto ya definido anteriormente.

EJEMPLO 8 Si C es el conjunto de los números naturales múltiplos de 3, entonces los elementos de C están caracterizados por la propiedad: "ser número natural múltiplo de 3", es decir, esta propiedad es verificada por los elementos de C y sólo por ellos. Una definición por comprensión de C es:

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}.$$

Nota bene La letra x de la definición del conjunto anterior por comprensión es una *variable terminológica*, es decir, no es más que un "soporte" para la representación del conjunto. Por ejemplo, se define por comprensión el mismo conjunto de las dos siguientes formas:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 3\} \quad \text{y} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es múltiplo de } 3\}.$$

▲

EJEMPLO 9 Si D es el conjunto de los ríos que nacen en la Península Ibérica, entonces los elementos de D están caracterizados por la propiedad: "ser río que nace en la Península Ibérica". Si denotamos por M el conjunto de los ríos del mundo, una definición por comprensión del conjunto D es:

$$D = \{x \in M \mid x \text{ nace en la Península Ibérica}\}.$$

EJEMPLO 10 Si F es el conjunto de los números naturales de tres cifras significativas,[2] entonces los elementos de F están caracterizados por la propiedad: "ser número natural de tres cifras significativas". Una definición por comprensión de F es:

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es de tres cifras significativas}\}.$$

Nótese que otra forma de definir el conjunto F por comprensión es:

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 100 \leqslant x \leqslant 999\}.$$

Notación de un conjunto con puntos suspensivos

Utilizaremos otra forma de definir un conjunto por comprensión: usando puntos suspensivos. El conjunto F del ejemplo 10 (cf. p. 376) se puede definir por comprensión de la forma:

$$F = \{100, 101, \ldots, 999\}.$$

Los puntos suspensivos se escriben cuando se sobreentiende inequívocamente lo que hay en su lugar; en otras palabras, cuando no hay lugar a dudas sobre qué sustituyen. En nuestro caso, sustituyen claramente los números 102, 103, etc.

Nota bene La representación de un conjunto utilizando puntos suspensivos no es una representación por extensión, pues no figuran explícitamente *todos y cada uno* de los elementos del conjunto. ▲

[2] Por número natural de tres cifras significativas entendemos: número natural que se escribe utilizando exactamente tres dígitos, y la cifra de las centenas no es 0.

Conjunto vacío Aceptaremos el siguiente postulado:

Conjunto vacío

> Existe un conjunto, denominado **conjunto vacío**, que no tiene elementos. Se denota: $\emptyset$.

También aceptaremos como postulado que el conjunto vacío es finito y de cardinal igual a 0:

$$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0.$$

EJEMPLO 11 Si X es el conjunto:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\},$$

entonces X no tiene ningún elemento, pues (como se comprueba fácilmente) no hay ningún número real x que satisfaga la igualdad: $x^2 + 1 = 0$. El conjunto X es, pues, vacío. En particular, X es finito, y se verifica: $\mathrm{Card}(X) = 0$.

Igualdad de conjuntos

Igualdad de conjuntos Si Δ (delta mayúscula) y Γ (gamma mayúscula) son dos conjuntos, se dice que son **iguales** si tienen los mismos elementos; es decir, si todo elemento de Δ pertenece a Γ y todo elemento de Γ pertenece a Δ; en otras palabras:

$$\text{si } x \in \Delta, \text{ entonces } x \in \Gamma, \quad \text{y} \quad \text{si } x \in \Gamma, \text{ entonces } x \in \Delta.$$

Es útil utilizar el signo '$\longrightarrow$' como abreviatura de "si ..., entonces..."; por ejemplo, escribiremos la frase:

"si x es múltiplo de 4, entonces x es múltiplo de 2"

de la forma:

$$(x \text{ es múltiplo de } 4) \longrightarrow (x \text{ es múltiplo de } 2),$$

o también:

$$(x \text{ es múltiplo de } 2) \longleftarrow (x \text{ es múltiplo de } 4).$$

También, utilizaremos el signo '$\longleftrightarrow$' como abreviatura de "...precisamente si...", o como abreviatura de "...si y sólo si..."; por ejemplo, escribiremos la frase:

"x es múltiplo de 2 y x es múltiplo de 3 si y sólo si x es múltiplo de 6"

de la forma:

$$(x \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y } x \text{ es múltiplo de } 3) \longleftrightarrow (x \text{ es múltiplo de } 6).$$

Nota bene El lector debe percatarse de que el significado del signo '$\longleftrightarrow$' es la conjunción del significado de los signos '$\longrightarrow$' y '$\longleftarrow$'. ▲

Con esta notación recién introducida, la igualdad de dos conjuntos Δ y Γ puede expresarse de la forma:

$$x \in \Delta \longleftrightarrow x \in \Gamma,$$

que se lee: "x pertenece a Δ precisamente si x pertenece a Γ", o también: "x pertenece a Δ si y sólo si x pertenece a Γ".

Notación para conjuntos iguales y para conjuntos distintos

Si dos conjuntos Δ y Γ son iguales, se escribe: $\Delta = \Gamma$.
Si dos conjuntos Δ y Γ *no* son iguales, se escribe: $\Delta \neq \Gamma$.

En lo sucesivo, indistintamente escribiremos: $\Delta = \Gamma$, o bien:

$$x \in \Delta \longleftrightarrow x \in \Gamma.$$

EJERCICIO 1 *Considérense los siguientes conjuntos:*

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{4,2,1,3\},$$
$$C = \{1,2,\{3\},4\} \quad y \quad D = \{1,\{2,3\},4\}.$$

Estudiar cuáles de los anteriores conjuntos son iguales entre sí. Calcular el cardinal de todos ellos. ▲

2. Subconjuntos Cuando cada uno de los elementos de un conjunto A también es elemento de otro conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** de B, o que B es un **superconjunto** de A.

Subconjunto

Si el conjunto A es un subconjunto del conjunto B, se escribe:

$$A \subseteq B,$$

Inclusión

y se dice: "A está **contenido** en B", o: "A está **incluido** en B"; también se puede expresar este hecho escribiendo: $B \supseteq A$, y se dice: "B contiene A".

Usando el signo '$\longrightarrow$':

$$A \subseteq B \quad \text{es lo mismo que:} \quad x \in A \longrightarrow x \in B; \tag{1}$$

y

$$B \supseteq A \quad \text{es lo mismo que:} \quad x \in B \longleftarrow x \in A.$$

Nótese que también podemos afirmar:

$$A \subseteq B \quad \text{es lo mismo que} \quad x \notin B \longrightarrow x \notin A. \tag{2}$$

Si el conjunto A *no* es un subconjunto del conjunto B, es decir, si hay al menos un elemento de A que no es elemento de B, entonces se escribe:

$$A \nsubseteq B, \quad \text{o} \quad B \nsupseteq A.$$

EJEMPLO 12 Se verifica:

- $\{1,2,\{3\},4\} \not\subseteq \{1,2,3,4\}$, ya que:

$$\{3\} \in \{1,2,\{3\},4\}, \quad \text{pero } \{3\} \notin \{1,2,3,4\};$$

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, como consecuencia de su definición;
- el conjunto de los días laborables de la semana no debe estar contenido en el conjunto de los días festivos de la semana;
- si A es el conjunto de las soluciones reales de la ecuación: $x - 4 = 0$, y B es el conjunto de soluciones reales de la ecuación: $x^2 - 16 = 0$, entonces: $A \subseteq B$.

Propiedades de la inclusión de conjuntos Enunciamos a continuación tres propiedades de la inclusión de conjuntos. Las dos primeras son obvias; la tercera requiere recordar la definición de igualdad de conjuntos:

Si A y B son dos conjuntos, entonces se verifica:

- $A \subseteq A$,
- $\left.\begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ B \subseteq C \end{cases}\right. \longrightarrow A \subseteq C,$
- $\left.\begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ B \subseteq A \end{cases}\right. \longleftrightarrow A = B.$

EJERCICIO 2 *Considérense los siguientes conjuntos:*

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{4,5,6,7,8,9\},$$
$$C = \{2,4,8,9\}, \quad D = \{4,5\}, \quad E = \{2,4\} \quad y \quad F = \{2\}.$$

Determinar cuáles de los conjuntos A, B, C, D, E o F pueden ser iguales al conjunto X en cada uno de los cuatro casos siguientes:

(a) $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, (b) $X \not\subseteq B$ y $X \subseteq C$,

(c) $X \not\subseteq A$ y $X \not\subseteq C$, (d) $X \subseteq B$ y $X \not\subseteq C$.

▲

Inclusión estricta

Subconjunto propio Diremos que un conjunto A está **incluido estrictamente** en un conjunto B, o que el conjunto A es un **subconjunto propio** del conjunto B, si se verifica:

$$A \subseteq B \quad \text{y} \quad B \not\subseteq A.$$

Si A es un subconjunto propio de B, escribiremos: $A \subset B$, o $B \supset A$.

EJERCICIO 3 *Comprobar se verifica:*

$$A \subset B \longrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ y \\ A \neq B. \end{cases}$$

▲

Conjunto de los subconjuntos de un conjunto

Conjunto de los subconjuntos de un conjunto Si E es un conjunto *finito*, se puede definir el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de E. Se denota: $\mathcal{P}(E)$.

EJEMPLO 13 Si $E = \{1, \alpha, \triangle\}$, entonces el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de E es el siguiente:

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{\alpha\}, \{\triangle\}, \{1, \alpha\}, \{1, \triangle\}, \{\alpha, \triangle\}, \{1, \alpha, \triangle\}\}.$$

Sobre el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(E)$ se tiene el siguiente teorema, que no demostraremos aquí:

Teorema 1 *Si E es un conjunto finito y* $\mathrm{Card}(E) = n$, *entonces:*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Nótese que para el conjunto E del ejemplo 13 se tiene:

$$\mathrm{Card}(E) = 3 \quad \text{y} \quad \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8.$$

Si E es un conjunto cualquiera (no necesariamente finito), admitiremos como postulado que los subconjuntos de E constituyen un conjunto, el cual se denota por $\mathcal{P}(E)$. Afirmar que X es un elemento de $\mathcal{P}(E)$, es decir: $X \in \mathcal{P}(E)$, es lo mismo que afirmar que X es un subconjunto de E, esto es: $X \subseteq E$.

3. Complementario de un conjunto. Diferencia de conjuntos Consideremos para todo este apartado un conjunto E.

Complementario de un conjunto

Complementario de un conjunto Si A es un subconjunto de E, los elementos de E que no son elementos de A constituyen un conjunto que se denomina **complementario** de A en E, y se denota: $\complement_E A$. Es decir:

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Obsérvese que de esta definición se deduce que el conjunto $\complement_E A$ también es, como el conjunto A, un subconjunto de E, y que si $x \in E$, entonces $x \in A$ o $x \in \complement_E A$, pero no ambas a la vez.

Propiedades del complementario Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, entonces se verifica:

- *Si $x \in E$ y $x \notin A$, entonces $x \in \complement_E A$; y recíprocamente: si $x \in \complement_E A$, entonces $x \in E$ y $x \notin A$.*

  Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de complementario.
- $\complement_E(\complement_E A) = A$.

  En efecto, de la definición de complementario se deduce:

$$\complement_E(\complement_E A) = \{x \in E \mid x \notin \complement_E A\} = \{x \in E \mid x \in A\} = A,$$

  donde la última igualdad se puede escribir teniendo en cuenta que A es un subconjunto de E.
- *Si $A \subseteq B$, entonces $\complement_E B \subseteq \complement_E A$.*

  En efecto, podemos escribir:

$$x \in \complement_E B \longrightarrow (x \in E \text{ y } x \notin B) \longrightarrow (x \in E \text{ y } x \notin A) \longrightarrow x \in \complement_E A,$$

  donde el segundo paso se justifica teniendo en cuenta (2) (cf. p. 378): $A \subseteq B$ es lo mismo que $x \notin B \longrightarrow x \notin A$. En consecuencia: $\complement_E B \subseteq \complement_E A$.

Recopilando:

> Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, entonces:
>
> - $\left.\begin{cases} x \in E \\ \text{y} \\ x \notin A \end{cases}\right. \longleftrightarrow x \in \complement_E A,$
> - $\complement_E(\complement_E A) = A,$
> - $A \subseteq B \longrightarrow \complement_E B \subseteq \complement_E A.$

Diferencia de conjuntos Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, los elementos de E que pertenecen a A pero no pertenecen a B constituyen un conjunto que se denomina **diferencia** de A y B, y se denota: $A - B$. Es decir:

Diferencia de conjuntos

$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

De esta definición y de la de complementario de un conjunto se deduce inmediatamente: $\complement_E A = E - A$.

EJERCICIO 4 *Dados los conjuntos:*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{y} \quad C = \{3, 4, 5, 6\},$$

definir por extensión los siguientes: (a) $A - B$, (b) $C - A$, (c) $B - C$, (d) $B - A$, (e) $B - B$. ▲

4. Intersección y unión de conjuntos Consideremos para todo este apartado un conjunto E.

Intersección de conjuntos Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, los elementos de E que pertenecen a la vez a A y a B constituyen un conjunto que se denomina **intersección** de A y B, y se denota: $A \cap B$. En símbolos:

Intersección de conjuntos

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Obsérvese que podemos escribir:

$$x \in A \cap B \longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \in B, \end{cases} \qquad x \notin A \cap B \longleftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ \text{o} \\ x \notin B. \end{cases}$$

Son consecuencias inmediatas de esta definición las siguientes propiedades:

Propiedades de la intersección

Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, entonces:

- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap B \subseteq A \quad \text{y} \quad A \cap B \subseteq B$.

Ampliamos nuestro postulado sobre el conjunto vacío aceptando que para cualquier conjunto X se verifica: $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Puede ocurrir que los conjuntos A y B no tengan elementos comunes. En este caso, diremos que A y B son **disjuntos**, y escribiremos: $A \cap B = \emptyset$.

Cuando escribamos: $A \cap B \cap C$, entenderemos: $(A \cap B) \cap C$, que es lo mismo —como se comprueba fácilmente— que $A \cap (B \cap C)$.

EJERCICIO 5 *Sean A y B dos subconjuntos disjuntos de un conjunto E. Comprobar podemos escribir:*

$$x \in A \longrightarrow x \notin B, \quad \text{y} \quad x \in B \longrightarrow x \notin A,$$

y deducir de ello que $A \subseteq \complement_E B$. ▲

EJERCICIO 6 *Si A, B y C son tres subconjuntos de un conjunto E, comprobar que si $A \subseteq B$, entonces se tiene: $A \cap C \subseteq B \cap C$.* ▲

EJERCICIO 7 *Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto E, probar que podemos escribir:*

$$A \subseteq B \longleftrightarrow A \cap B = A.$$

▲

EJERCICIO 8 *Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto E, demostrar se verifica:*

$$A - B = A \cap \complement_E B,$$

y deducir de ello que $(\complement_E B) - (\complement_E A) = A - B$. ▲

Unión de conjuntos Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, los elementos de E que pertenecen a A o a B, o a ambos, constituyen un conjunto que se denomina **unión** de A y B, y se denota: $A \cup B$. En símbolos:

Unión de conjuntos

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

Obsérvese que podemos escribir:

$$x \in A \cup B \longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \ \text{o} \\ x \in B, \end{cases} \qquad x \notin A \cup B \longleftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ \ \text{y} \\ x \notin B. \end{cases}$$

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de esta definición:

Propiedades de la unión

> Si A y B son dos subconjuntos del conjunto E, entonces:
> - $A \cup B = B \cup A$,
> - $A \cup A = A$,
> - $A \cup B \supseteq A \quad \text{y} \quad A \cup B \supseteq B$.

Concluimos nuestro postulado sobre el conjunto vacío aceptando que para cualquier conjunto X se verifica: $X \cup \emptyset = X$.

Cuando escribamos: $A \cup B \cup C$, entenderemos: $(A \cup B) \cup C$, que es lo mismo —como se comprueba fácilmente— que $A \cup (B \cup C)$.

EJERCICIO 9 *Si A, B y C son tres subconjuntos de un conjunto E, comprobar que si $A \subseteq B$, entonces se tiene: $A \cup C \subseteq B \cup C$.* ▲

EJERCICIO 10 *Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto E, demostrar que si $(\complement_E A) \cup B = E$, entonces se tiene: $\complement_E A \supseteq \complement_E B$.* ▲

EJERCICIO 11 *Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto E, probar que podemos escribir lo siguiente: $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$.* ▲

Relaciones entre unión e intersección Si A, B y C son tres subconjuntos de E, entonces se verifica:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  En efecto:

$$x \in A \cap (B \cup C) \longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \ \text{y} \\ x \in B \cup C \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \ \text{y} \\ x \in B \ \text{o} \ x \in C \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \ \text{y} \ x \in B \\ \ \text{o} \\ x \in A \ \text{y} \ x \in C \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ \ \text{o} \\ x \in A \cap C \end{cases} \longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

  La comprobación es análoga a la anterior: donde se escribía: '$\cap$', '$\cup$', 'y', 'o', ahora se escribe: '$\cup$', '$\cap$', 'o', 'y', respectivamente.
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

  En efecto:

$$x \in \complement_E(A \cap B) \longleftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ \text{y} \\ x \notin A \cap B \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x \in E \text{ y } x \notin A \\ \text{o} \\ x \in E \text{ y } x \notin B \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x \in \complement_E A \\ \text{o} \\ x \in \complement_E B \end{cases} \longleftrightarrow x \in (\complement_E A) \cup (\complement_E B).$$

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

  La comprobación es análoga a la de la propiedad anterior.

De las igualdades anteriores, las dos primeras reciben el nombre, respectivamente, de propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión, y de propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección; las dos últimas se denominan **leyes de DE MORGAN.**[3] Recogemos todas en el siguiente cuadro:

-Propiedades distributivas
Leyes de A. de Morgan

> Si A, B y C son tres subconjuntos del conjunto E, entonces:
> - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
> - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
> - $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$,
> - $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

EJERCICIO 12 *Si A y B son dos subconjuntos de un conjunto E, demostrar las siguientes igualdades:*

a) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$,

b) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$,

c) $\complement_E(A - B) = (\complement_E A) \cup (A \cap B)$. ▲

EJERCICIO 13 *Considérese el conjunto $E = \{1, 2, \ldots, 90\}$, y sean los conjuntos:*

$$A = \{x \in E \mid \text{ alguna de las cifras de } x \text{ es } 6\}, \quad B = \{x \in E \mid x \text{ es múltiplo de } 3\},$$

$$C = \{x \in E \mid \text{ la suma de las cifras de } x \text{ es múltiplo de } 5\}.$$

Calcular $\mathrm{Card}(A)$ *y* $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$*, y definir por extensión los siguientes conjuntos:*

$$(a) \quad (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \cap C, \quad (b) \quad (A - B) - C, \quad (c) \quad A - (B - C).$$

Además, escribir una expresión, utilizando los conjuntos A, B y C, de suerte que se obtenga un conjunto con un único elemento. ▲

[3] Augustus DE MORGAN (1806–1878), matemático inglés.

Teorema de los cuatro cardinales

Teorema 2 *Si A y B son dos subconjuntos finitos de un conjunto E, entonces:*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B). \tag{3}$$

Demostración El recuento de los elementos de $A \cup B$ puede llevarse a cabo contando los elementos de A y contando los elementos de B, pero teniendo en cuenta que cada elemento de $A \cap B$ se cuenta dos veces: una vez como elemento de A, y otra como elemento de B. Por tanto, para obtener $\mathrm{Card}(A \cup B)$ podemos sumar $\mathrm{Card}(A)$ y $\mathrm{Card}(B)$, y al resultado restarle $\mathrm{Card}(A \cap B)$. Es decir:

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B),$$

de donde se concluye la igualdad (3).

Un corolario de este teorema es la siguiente fórmula para el cardinal la unión de tres subconjuntos finitos A, B y C del conjunto E:

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Un problema propuesto En cierto país se ha realizado una encuesta entre 1.470 lectores de los tres periódicos que se publican: A, B y C. Se obtuvieron los siguientes resultados:

- el periódico A es leído por el doble de los que leen el periódico B;
- el B es leído por el doble de los que leen el C;
- el C es leído por el doble de los que leen ambos periódicos A y B;
- los que leen ambos periódicos A y B son el doble de los que leen ambos periódicos A y C;
- los que leen ambos periódicos A y C son el doble de los que leen ambos periódicos B y C;
- por último, se sabe que más de 29 personas leen ambos periódicos B y C.

¿Cuántas personas leen todos y cada uno de los tres periódicos?[4]

Conjunto universal

Nota En muchos libros, se define el llamado **conjunto universal**: un conjunto que contiene todos los conjuntos con los que se está trabajando, y que puede ser distinto en cada ejemplo. En este contexto, se define la diferencia, la intersección y la unión para conjuntos que implícitamente se suponen subconjuntos del conjunto universal, y también se define el complementario de un conjunto sin decir con respecto a qué, ya que se entiende que es con respecto al citado conjunto universal. En este sentido, es habitual encontrarse con una notación más sencilla para designar el complementario de un conjunto A; en vez de: $\complement_E A$, se utiliza: A', o A^c. ▲

[4]Puede verse la solución en la página 422.

EJEMPLO 17 Consideremos el conjunto $C = \{1, 2, 3\}$, y sea S la relación en el conjunto C dada por:

$$S(x, y) : \text{《}x \text{ es estrictamente menor que } y\text{》}.$$

El grafo de S es: $\Delta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Nota Frecuentemente, una relación se expresa con un signo. Por ejemplo, la relación R en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$) dada por:

$$R(x, y) : \text{《}x \text{ es menor o igual que } y\text{》}$$

suele representarse por el signo $\leqslant$, en el sentido de que la notación: $x \leqslant y$ tiene el mismo significado que: $R(x, y)$. ▲

Propiedades de las relaciones en un conjunto Consideremos un conjunto A, y sea R una relación en A. Se dice que la relación R es **reflexiva** si verifica:

Relación reflexiva

$$\forall\, a \in A,\ R(a, a);$$

esto es: R es reflexiva si y sólo si cada elemento está relacionado consigo mismo.

EJEMPLO 18 En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros consideremos las relaciones $\leqslant$ (menor o igual) y $<$ (estrictamente menor). Obviamente, $\leqslant$ es una relación reflexiva, pues todo número entero es menor o igual que sí mismo: $\forall\, x \in \mathbb{Z},\ x \leqslant x$.

Sin embargo, $<$ no es reflexiva; por ejemplo: 1 no es estrictamente menor que 1.

Relación simétrica

Se dice que la relación R es **simétrica** si verifica:

$$\forall\, (a, b) \in A^2,\ R(a, b) \Rightarrow R(b, a);$$

esto es: R es simétrica precisamente si de estar relacionado un elemento con otro elemento necesariamente se deduce que el segundo está relacionado con el primero.

EJEMPLO 19 Si T es la relación en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales dada por:

$$T(x, y) : \text{《}x + y \text{ es un número par}\text{》},$$

entonces T es simétrica.

EJEMPLO 20 Si P es la relación definida sobre $\mathbb{N}$ por:

$$P(x, y) : \text{《}x \text{ divide a } y\text{》},$$

entonces P no es simétrica; por ejemplo: 2 divide a 4, pero 4 no divide a 2.

Relación antisimétrica

Se dice que la relación R es **antisimétrica** si verifica:

$$\forall\,(a,b) \in A^2,\ (R(a,b) \text{ y } R(b,a)) \Rightarrow (a = b).$$

Esto es: R es antisimétrica precisamente si de estar relacionado un elemento con otro, y éste con el primero, necesariamente se deduce que los dos elementos son el mismo; o en otras palabras: si se seleccionan dos elementos distintos, entonces al menos uno no está relacionado con el otro.

EJEMPLO 21 La relación P definida sobre $\mathbb{N}$ considerada en el ejemplo 20 es antisimétrica: si a y b son dos números naturales, es obvio que de suponer: a divide a b y b divide a a, se deduce: $a = b$.

EJEMPLO 22 La relación T definida sobre $\mathbb{N}$ considerada en el ejemplo 19 no es antisimétrica; por ejemplo: $T(3,5)$, pues $3 + 5$ es número par, y también se tiene: $T(5,3)$; sin embargo: $3 \neq 5$.

Relación transitiva

Se dice que la relación R es **transitiva** si verifica:

$$\forall\,(a,b,c) \in A^3,\ (R(a,b) \text{ y } R(b,c)) \Rightarrow R(a,c);$$

esto es: R es transitiva precisamente si de estar relacionado un elemento con otro, y éste con un tercero, necesariamente se deduce que el primero está relacionado con el tercero.

EJEMPLO 23 La relación P del ejemplo 20 (cf. p. 388) es transitiva, pues dados tres números naturales a, b y c, si a divide a b y b divide a c, es obvio que a divide a c.

EJEMPLO 24 La relación $\leqslant$ definida sobre $\mathbb{R}$ es obviamente transitiva: si $x \leqslant y$ y $y \leqslant z$, entonces $x \leqslant z$, cualesquiera que sean los números reales x, y y z.

Obsérvese que la transitividad de $\leqslant$ permite escribir sin ambigüedad la doble desigualdad:

$$x \leqslant y \leqslant z, \quad \text{en vez de:} \quad x \leqslant y \quad \text{y} \quad y \leqslant z.$$

EJEMPLO 25 Si consideramos la relación D en $\mathbb{N}$ dada por:

$$D(x,y) : \text{«}x \text{ y } y \text{ tienen algún divisor común»},$$

entonces D no es transitiva; por ejemplo: $D(4,14)$ y $D(14,49)$, pero 4 no está relacionado con 49 por D.

Relación de equivalencia

Relación de equivalencia De una relación R definida sobre un conjunto A se dice es una relación de **equivalencia** si verifica:

a) R es reflexiva,

b) R es simétrica,

c) R es transitiva.

EJEMPLO 26 En el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares de números reales, la relación Q dada por:

$$Q((x,y),(z,t)) : \langle\!\langle x = z \rangle\!\rangle$$

es una relación de equivalencia.

Relación de orden

Relación de orden De una relación R definida sobre un conjunto A se dice es una relación de **orden** si verifica:

a) R es reflexiva,

b) R es antisimétrica,

c) R es transitiva.

EJEMPLO 27 En el conjunto $\mathbb{Z}$, la relación $\leqslant$ es una relación de orden.

EJERCICIO 14 *Sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares de números reales, definimos la relación $\leqslant$ de la siguiente manera:*

$$(x,y) \leqslant (z,t) : \langle\!\langle x \leqslant z \quad y \quad y \leqslant t \rangle\!\rangle.$$

(Utilizar el signo $\leqslant$ tanto para relacionar números reales como para relacionar pares de números reales no da lugar a confusión, a poca atención que se ponga.) Probar que $\leqslant$ es una relación de orden en $\mathbb{R}^2$. ▲

Relación de orden total

Relación de orden total De una relación de *orden* R en un conjunto A se dice es una relación de orden **total** si verifica:

$$\forall\, (a,b) \in A^2,\ R(a,b) \ \text{o}\ R(b,a).$$

EJEMPLO 28 La relación $\leqslant$ en $\mathbb{R}$ es una relación de orden total:

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \ \text{o}\ y \leqslant x.$$

Sin embargo, la relación de orden $\leqslant$ del ejercicio 14 no es total; por ejemplo, ni $(1,-1)$ está relacionado con $(0,0)$, ni $(0,0)$ está relacionado con $(1,-1)$.

Relación de preorden

Relación de preorden De una relación R definida sobre un conjunto A se dice es una relación de **preorden** si verifica:

a) R es reflexiva,

b) R es transitiva.

Obsérvese que toda relación de orden es también de preorden.

EJEMPLO 29 Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, y sea $B = \mathcal{P}(A)$. Definimos sobre B la relación R dada por: $R(X,Y)$: «$\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$». Se cumple:

a) R es reflexiva; en efecto, para cada $X \in \mathcal{P}(A)$ se verifica obviamente la desigualdad: $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(X)$, y por tanto: $R(X,X)$;

b) R es transitiva: si X, Y y Z son subconjuntos de A tales que: $R(X,Y)$ y $R(Y,Z)$, es decir: $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$ y $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(Z)$, entonces: $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Z)$, y $R(X,Z)$.

En conclusión, R es una relación de preorden.

Notemos que R no es una relación de orden, pues no verifica la propiedad antisimétrica. Por ejemplo, si $X = \{1,2\}$ y $Y = \{2,3\}$, entonces se tiene: $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) = 2$, con lo que $R(X,Y)$ y $R(Y,X)$, pero $X \neq Y$. No toda relación de preorden es de orden.

A.2 APLICACIONES

Correspondencia entre dos conjuntos

1. *Correspondencias* Sean A y B dos conjuntos. Una **correspondencia** entre A y B (o de A en B) es una terna (A,B,Δ), donde Δ es un subconjunto de $A \times B$.

Conjuntos de partida y de llegada

Si (A,B,Δ) es una correspondencia entre A y B y $(x,y) \in \Delta$, se dice que a x le **corresponde** y por (A,B,Δ). También, de A se dice es el **conjunto de partida**; de B, el **conjunto de llegada**; y de Δ, el **grafo** de la correspondencia.

Nota bene Una correspondencia (A,B,Δ) es una relación entre los elementos de A y los de B cuyo grafo es Δ. ▲

EJEMPLO 30 Consideremos los conjuntos: $A = B = \mathbb{R}$, y sea $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. En la correspondencia $(\mathbb{R},\mathbb{R},\Delta)$, $\mathbb{R}$ es el conjunto de partida y también el de llegada. Al número real 0 le corresponden los números reales 1 y -1, pues $(0,1) \in \Delta$ y $(0,-1) \in \Delta$, ya que: $0^2 + 1^2 = 1$ y $0^2 + (-1)^2 = 1$; el número 0 es un elemento del conjunto de partida al que le corresponden dos elementos del conjunto de llegada. Por otro lado, al número real 1 le corresponde únicamente el número real 0. Y al número 2 no le corresponde ningún número real, pues la ecuación: $2^2 + y^2 = 1$ no tiene solución real.

Aplicación entre dos conjuntos

2. Aplicaciones Sean A y B dos conjuntos. Una **aplicación de** A **y con valores en** B, o aplicación de A en B, es una correspondencia $f = (A, B, \Delta)$ que verifica:

para *todo* x perteneciente a A,
existe un y perteneciente a B, *y sólo uno*, tal que $(x, y) \in \Delta$.

Imagen de un elemento

Si $x \in A$, y $y \in B$ es el único elemento de B que le corresponde por la aplicación f (es decir, es el único elemento y de B tal que $(x, y) \in \Delta$), se dice que y es la **imagen** de x por la aplicación f, y se le denota: $f(x)$, es decir: $y = f(x)$.

Notación Una aplicación $f = (A, B, \Delta)$ se denota de la forma:

$$A \xrightarrow{f} B,$$

o más detalladamente:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \dashrightarrow & f(x), \end{array} \quad \text{o} \quad x \in A \longrightarrow f(x) \in B.$$

El grafo de la aplicación f puede escribirse: $\Delta = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$; y también se le denota: $\Delta = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. ▲

EJEMPLO 31 La correspondencia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \Delta)$ del ejemplo 30 (cf. p. 391) no es una aplicación, pues al número real 0 le corresponde más de un elemento del conjunto de llegada. Además, al número real 2 no le corresponde ningún elemento del conjunto de llegada.

EJEMPLO 32 Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, y sea: $\Delta = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x^3\}$. Entonces la correspondencia $f = (A, A, \Delta)$ es una aplicación. En efecto, a cada x perteneciente a A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento y de A (conjunto de llegada) tal que: $(x, y) \in \Delta$; precisamente: $y = x^3$. En símbolos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ x & \dashrightarrow & x^3. \end{array}$$

Nótese se verifica: $\forall\, x \in A,\ f(x) = x^3$.

Igualdad de aplicaciones

Igualdad de aplicaciones Dos aplicaciones $f = (A, B, \Delta)$ y $g = (C, D, \Gamma)$ son **iguales**, y se denota: $f = g$, si se verifica:

$$A = C, \quad B = D \quad \text{y} \quad \Delta = \Gamma;$$

es decir: los conjuntos de partida: A y C, son iguales; los de llegada: B y D, también son iguales; y cada elemento de A (o C) tiene la misma imagen por una aplicación que por la otra: $\forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Aplicación identidad

Aplicación identidad sobre un conjunto Sea A un conjunto no vacío. La aplicación:

$$x \in A \longmapsto x \in A$$

es una aplicación de A en A que se denomina **aplicación identidad** sobre A (o de A), y se denota: I_A. Se verifica: $\forall\, x \in A,\ I_A(x) = x$. Nótese que el grafo de la aplicación I_A es: $\Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Restricción de una aplicación

Restricción de una aplicación Consideremos una aplicación f de un conjunto A en un conjunto B, y sea A_1 un subconjunto de A. La aplicación f_1 de A_1 en B que verifica:

$$\forall\, x \in A_1,\ f_1(x) = f(x)$$

se denomina **restricción** de f a A_1.

EJERCICIO 15 *Si f es la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+$ que verifica: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|$, demostrar que la restricción de f a $\mathbb{R}_+$ es igual a la identidad sobre $\mathbb{R}_+$.* ▲

Conjunto de las aplic. de un conjunto en otro

Conjunto de las aplicaciones de A en B Sean A y B dos conjuntos. Aceptaremos como postulado que las aplicaciones de A en B constituyen un conjunto. A este conjunto lo denotaremos por B^A.

3. ***Imagen e imagen recíproca por una aplicación*** Sea f una aplicación de un conjunto A en un conjunto B.

Imagen de un conjunto Si A_1 es un subconjunto de A, se define:

$$f[A_1] = \{y \in B \mid \exists\, x \in A_1,\ f(x) = y\},$$

Imagen de un conjunto por una aplicación

y del conjunto $f[A_1]$ se dice es el **conjunto imagen de A_1 por f** (o simplemente: la imagen de A_1 por f). También se escribe:

$$f[A_1] = \{f(x) \mid x \in A_1\}.$$

El conjunto $f[A_1]$ es, pues, el formado por los elementos de B que son imagen por f de algún elemento de A_1. Obsérvese que $f[A_1]$ es un subconjunto del conjunto de llegada: $f[A_1] \subseteq B$.

Imagen de una aplicación

Del conjunto $f[A]$ (es decir, cuando estamos en el caso en que $A_1 = A$) se dice es el **conjunto imagen de la aplicación f** (o simplemente: la imagen de f), y se denota: $\mathrm{Im}(f)$. Esto es:

$$\mathrm{Im}(f) = f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Nota bene Hemos utilizado corchetes para encerrar los conjuntos, y paréntesis para los elementos. Así, si $x \in A$, escribimos: $f(x)$; si $A_1 \subseteq A$, escribimos: $f[A_1]$. ▲

Propiedades de la imagen de un conjunto Si f es una aplicación de A en B y A_1 y A_2 son dos subconjuntos de A, se verifican las siguientes propiedades:

1) $(A_1 \subseteq A_2) \implies (f[A_1] \subseteq f[A_2])$.

En efecto, si y es un elemento cualquiera de $f[A_1]$, por definición se tiene:

$$\exists x \in A_1,\ f(x) = y; \tag{4}$$

pero si $A_1 \subseteq A_2$, entonces podemos escribir: $(x \in A_1) \implies (x \in A_2)$, y de (4) se deduce: $\exists\, x \in A_2,\ f(x) = y$, que por definición significa: $y \in f[A_2]$. En conclusión: $f[A_1] \subseteq f[A_2]$.

2) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$.

En efecto, se tienen las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} y \in f[A_1 \cup A_2] &\iff \exists\, x \in A_1 \cup A_2,\ f(x) = y \\ &\iff (\exists\, x \in A_1,\ f(x) = y) \ \text{ o } \ (\exists\, x \in A_2,\ f(x) = y) \\ &\iff (y \in f[A_1]) \ \text{ o } \ (y \in f[A_2]) \\ &\iff y \in f[A_1] \cup f[A_2], \end{aligned}$$

donde en las equivalencias primera y tercera se ha tenido en cuenta la definición de imagen de un conjunto por la aplicación f.

3) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.

En efecto, de acuerdo con la propiedad (1) se tiene:

$$A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \implies f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1], \quad A_1 \cap A_2 \subseteq A_2 \implies f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_2],$$

y así: $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.

Nota Debe observarse que el contenido entre conjuntos de la propiedad (3) puede ser estricto; es decir, puede ocurrir que $f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2]$. Por ejemplo, consideremos los conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, y sea f la aplicación de A en B dada por: $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = a$. Si $A_1 = \{1, 2\}$ y $A_2 = \{2, 3\}$, se verifica:

$$A_1 \cap A_2 = \{2\}, \quad f[A_1] = f[A_2] = \{a, b\},$$
$$f[A_1 \cap A_2] = \{f(2)\} = \{b\} \subset \{a, b\} = f[A_1] \cap f[A_2].$$

▲

Imagen recíproca (o inversa) de un conjunto por una aplicación

Imagen recíproca (o inversa) de un conjunto Si B_1 es un subconjunto de B, se define:

$$f^{-1}[B_1] = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\},$$

y del conjunto $f^{-1}[B_1]$ se dice es el **conjunto imagen recíproca**, o **inversa**, **de** B_1 **por** f. El conjunto $f^{-1}[B_1]$ es, pues, el de los elementos de A cuya imagen por f pertenece a B_1. Nótese que $f^{-1}[B_1]$ es un subconjunto del conjunto de partida; esto es: $f^{-1}[B_1] \subseteq A$.

Propiedades de la imagen recíproca de un conjunto Si f es una aplicación de A en B y B_1 y B_2 son dos subconjuntos de B, se verifican las siguientes propiedades:

1) *Puede ocurrir que $f^{-1}[B_1] = \emptyset$ sin ser B_1 vacío.*

Por ejemplo, para los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b\}$ y para la aplicación f de A en B definida por $f(1) = b$ y $f(2) = b$, se verifica: $f^{-1}[\{a\}] = \{x \in A \mid f(x) \in \{a\}\} = \emptyset$.

2) $(B_1 \subseteq B_2) \implies (f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2])$.

En efecto, si $B_1 \subseteq B_2$, podemos escribir:

$$x \in f^{-1}[B_1] \Rightarrow f(x) \in B_1 \Rightarrow f(x) \in B_2 \Rightarrow x \in f^{-1}[B_2],$$

y en consecuencia: $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$. (La primera implicación y la última se justifican con la definición de imagen recíproca de un conjunto por f, y la segunda con la hipótesis: $B_1 \subseteq B_2$.)

3) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.

Se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff (f(x) \in B_1) \text{ o } (f(x) \in B_2) \\ &\iff \left(x \in f^{-1}[B_1]\right) \text{ o } \left(x \in f^{-1}[B_2]\right) \\ &\iff x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2], \end{aligned}$$

donde las equivalencias primera y tercera se justifican con la definición.

4) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

La prueba es análoga a la de la propiedad anterior:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2] &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff (f(x) \in B_1) \text{ y } (f(x) \in B_2) \\ &\iff \left(x \in f^{-1}[B_1]\right) \text{ y } \left(x \in f^{-1}[B_2]\right) \\ &\iff x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]. \end{aligned}$$

5) $f[f^{-1}[B_1]] \subseteq B_1$.

Esta propiedad es consecuencia de las definiciones dadas: si $y \in f[f^{-1}[B_1]]$, entonces se verifica:

$$\exists\, x \in f^{-1}[B_1],\ f(x) = y,$$

y la equivalencia: $x \in f^{-1}[B_1] \iff f(x) \in B_1$ permite concluir: $y \in B_1$. En consecuencia: $f[f^{-1}[B_1]] \subseteq B_1$.

6) *Si A_1 es un subconjunto de A, entonces: $A_1 \subseteq f^{-1}[f[A_1]]$.*

Esta propiedad también es una consecuencia inmediata de las definiciones: si $x \in A_1$, entonces $f(x) \in f[A_1]$, y de esto se deduce que $x \in f^{-1}[f[A_1]]$.

Nota El contenido entre conjuntos de las propiedades (5) y (6) anteriores puede ser estricto. Dejamos al lector la tarea de darse cuenta de que así ocurre con la aplicación f de $A = \{1,2\}$ en $B = \{a,b\}$ dada por $f(1) = a$ y $f(2) = a$, y con los conjuntos $B_1 = \{b\}$ y $A_1 = \{2\}$. ▲

4. Tipología de las aplicaciones Sea f una aplicación de un conjunto A en un conjunto B.

Aplicación inyectiva

Aplicación inyectiva (o inyección) Diremos que la aplicación f es **inyectiva** si las imágenes por f de elementos diferentes de A son elementos diferentes de B:

$$\forall\,(x,y) \in A^2,\ (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))\,. \tag{5}$$

Otra forma equivalente de escribir (5) es:

$$\forall\,(x,y) \in A^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y). \tag{6}$$

En palabras: si dos elementos tienen la misma imagen por f, entonces son el mismo.

EJEMPLO 33 Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$, y sean f, g y h las aplicaciones de A en $\mathbb{R}$ definidas por las fórmulas:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x - 1 \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}.$$

Veamos si estas aplicaciones son inyectivas, y para ello estudiemos en cada caso si se verifica (6).

Para la aplicación f, si x y y son dos elementos de A con la misma imagen: $f(x) = f(y)$, es decir, tales que: $x^2 = y^2$, no necesariamente ocurre que $x = y$; por ejemplo: $(-1)^2 = 1^2$, pero -1 y 1 son elementos distintos de A. La aplicación f no es, pues, inyectiva.

Para la aplicación g, si x y y son dos elementos de A, se verifica:

$$(g(x) = g(y)) \Longrightarrow (x - 1 = y - 1) \Longrightarrow x = y,$$

y g es inyectiva.

Finalmente, la aplicación h no es inyectiva. Por ejemplo, los números 1 y -1 son elementos distintos de A con la misma imagen por h: $h(1) = h(-1) = 1/3$.

EJERCICIO 16 *Sea f una aplicación de A en B. Si se verifica:*

$$\forall\,(x,y) \in A^2,\ (f(x) \neq f(y)) \Rightarrow (x \neq y), \tag{$*$}$$

¿se deduce que f es inyectiva? ▲

Aplicación suprayectiva

Aplicación suprayectiva (o suprayección) Diremos que la aplicación f es **suprayectiva** (de A sobre B) si cada elemento de B es imagen por f de al menos un elemento de A:

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A,\ y = f(x).$$

Una forma de expresar que la aplicación f es suprayectiva de A sobre B es escribiendo: $f[A] = B$, o $\operatorname{Im}(f) = B$.

EJEMPLO 34 Sea f la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}, \\ x & \dashrightarrow & x^2. \end{array}$$

Entonces f es suprayectiva, pues cada elemento del conjunto de llegada es imagen de algún elemento del conjunto de partida: si y es un número real no negativo, entonces y es la imagen por f de $\sqrt{y}$: $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. Nótese que y también es la imagen por f de $-\sqrt{y}$.

EJEMPLO 35 La aplicación g de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ que verifica:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{1}{x}$$

es una aplicación suprayectiva. En efecto: si $y \in \mathbb{R}^*$, entonces y es la imagen por g de $1/y$:

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{1/y} = y.$$

EJEMPLO 36 Las aplicaciones f, g y h, de A en $\mathbb{R}$, del ejemplo 33 no son suprayectivas. El lector puede comprobar sin dificultad que $y = 7$, por ejemplo, no es imagen de algún elemento de A ni por f, ni por g ni por h.

Aplicación biyectiva (o biyección). Aplicación inversa Diremos que la aplicación f es **biyectiva** (o una **biyección** de A sobre B) si es a la vez inyectiva y suprayectiva; es decir: cada elemento y de B es la imagen por f de un único elemento x de A.

Aplicación biyectiva

Si f es una aplicación biyectiva de A en B, la correspondencia (B, A, Δ), donde:

$$\Delta = \{(y, x) \in B \times A \mid y = f(x)\},$$

Aplicación inversa

es una aplicación de B en A, llamada **aplicación inversa** (o **recíproca**) de f, y denota: f^{-1}. Por definición, se tiene:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$

Se verifica que la aplicación f^{-1} es suprayectiva. En efecto, si x es un elemento de A (conjunto de llegada de f^{-1}), entonces x es la imagen por f^{-1} precisamente de $y = f(x)$: $f^{-1}(y) = x$.

También se verifica que la aplicación f^{-1} es inyectiva. En efecto, si y_1 e y_2 son dos elementos de B tales que $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, donde $x \in A$, por definición de f^{-1} se tiene: $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$, y por tanto: $y_1 = y_2$, y f^{-1} es inyectiva.

En conclusión: f^{-1} es una biyección de B sobre A. La aplicación inversa de la biyección f^{-1} es la propia aplicación f: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Nota bene Dado un elemento b del espacio de llegada de una aplicación f, no deben confundirse las notaciones:

$$f^{-1}[\{b\}] \quad \text{y} \quad f^{-1}(b).$$

La primera notación tiene sentido cualquiera que sea la aplicación f, y designa un *subconjunto* del conjunto de partida: el de los elementos cuya imagen por f pertenece a $\{b$ es decir, es igual a b. La segunda notación sólo tiene sentido cuando f es biyectiva, y en este caso designa un *elemento* del conjunto de partida: la imagen de b por la aplicación inversa de f, o también: el único elemento cuya imagen por f es b. ▲

EJEMPLO 37 La aplicación f del ejemplo 34 no es biyectiva, puesto que no es inyectiva. Sin embargo, la aplicación g del ejemplo 35:

$$x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*,$$

sí es biyectiva, ya que es inyectiva y suprayectiva (lo primero es obvio y lo segundo se probó en el mismo ejemplo 35). Para calcular g^{-1}, notemos que si $y \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}^*$, por definición de aplicación inversa se tiene: $g^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$. Como:

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y},$$

resulta que g^{-1} es la aplicación: $y \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/y \in \mathbb{R}^*$. En este caso concreto se verifica que $g^{-1} = g$.

Otra definición de cardinal de un conjunto

Nota El concepto de aplicación biyectiva permite dar una definición de cardinal y de conjunto finito:

- si n es un número natural mayor o igual que 1, diremos que un conjunto X es de **cardinal** igual a n (en símbolos: $\mathrm{Card}(X) = n$) si existe una aplicación biyectiva de X en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$;
- de un conjunto X se dice es **finito** si existe algún número natural $n \geqslant 1$ de modo que: $\mathrm{Card}(X) = n$.

Aceptamos como postulado que el conjunto vacío tiene cardinal igual a 0 y que es un conjunto finito. ▲

5. *Composición de aplicaciones*

Si f es una aplicación de A en B y g es una aplicación de B en C, entonces para cada elemento x de A queda determinado unívocamente el elemento $f(x)$ de B, y el elemento $g(f(x))$ de C. En otras palabras, la correspondencia de A en C que a cada x perteneciente a A le hace corresponder el elemento $g(f(x))$ perteneciente a C define una aplicación de A en C. Esta aplicación se denomina **aplicación compuesta** de f y g, y se denota:

Aplicación compuesta

$$g \circ f$$

—que se lee "f compuesta con g"—. Se verifica: $\forall\, x \in A,\ [g \circ f](x) = g(f(x))$.

Utilizando diagramas de flechas, pasamos de:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & \dashrightarrow & f(x) = y & \dashrightarrow & g(y) = g(f(x)) \end{array}$$

a:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g \circ f} & C \\ x & \dashrightarrow & g(f(x)) . \end{array}$$

EJEMPLO 38 Sean f y g las aplicaciones del conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ en sí mismo definidas de la forma:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 4,$$
$$g(1) = 2, \quad g(2) = 1, \quad g(3) = 3, \quad g(4) = 3.$$

Hallemos la aplicaciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, que son aplicaciones de A en sí mismo.

De la definición de composición de aplicaciones se obtiene:

$$[f \circ g](1) = f(g(1)) = f(2) = 2, \qquad [f \circ g](2) = f(g(2)) = f(1) = 2,$$
$$[f \circ g](3) = f(g(3)) = f(3) = 4, \qquad [f \circ g](4) = f(g(4)) = f(3) = 4;$$

asimismo:

$$[g \circ f](1) = g(f(1)) = g(2) = 1, \qquad [g \circ f](2) = g(f(2)) = g(2) = 1,$$
$$[g \circ f](3) = g(f(3)) = g(4) = 3, \qquad [g \circ f](4) = g(f(4)) = g(4) = 3.$$

EJEMPLO 39 Sean f y g las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por las fórmulas: $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$. Calculemos las fórmulas que permiten expresar las aplicaciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$, aplicaciones que también son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Se tiene:

$$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x,$$
$$[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + 1 = x^2.$$

EJEMPLO 40 Consideremos la aplicación f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, y la aplicación g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $g(x) = (x, 2x)$.

La aplicación compuesta $f \circ g$ es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x, 2x) = x + 2(2x) = 5x;$$

y la aplicación compuesta $g \circ f$ es de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

$$[g \circ f](x,y) = g(f(x,y)) = g(x + 2y) = (x + 2y, 2x + 4y).$$

(Observe el lector que hemos cambiado de (x_1, x_2) a (x, y); expresamos en ambos casos lo mismo, puesto que estas letras son variables "mudas" o terminológicas: un simple soporte para la notación.)

Composición de más de dos aplicaciones

Composición de tres aplicaciones Sean f, g y h aplicaciones de A en B, de B en C, y de C en D, respectivamente. Se tiene la siguiente igualdad de aplicaciones:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

En efecto: ambas son aplicaciones de A en D y, si x es un elemento arbitrario de A, su imagen es la misma por una aplicación que por la otra:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h([g \circ f](x)) = h(g(f(x))),$$
$$[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ g](f(x)) = h(g(f(x))).$$

Notación La aplicación: $h \circ (g \circ f)$, o bien: $(h \circ g) \circ f$, se denota: $h \circ g \circ f$. ▲

Composición con una aplicación identidad

Algunos casos particulares Consideremos una aplicación f de A en B, y sea I_A la aplicación identidad sobre A, y sea I_B la aplicación identidad sobre B. Es decir, consideramos las aplicaciones:

$$x \in A \longmapsto f(x) \in B, \quad x \in A \longmapsto x \in A, \quad y \in B \longmapsto y \in B.$$

Se verifica que las aplicaciones compuestas $f \circ I_A$ y $I_B \circ f$, que son ambas de A en B, tienen la misma imagen que f en cada elemento x de A:

$$[f \circ I_A](x) = f(I_A(x)) = f(x) \quad \text{y} \quad [I_B \circ f](x) = I_B(f(x)) = f(x).$$

En consecuencia: $f \circ I_A = I_B \circ f = f$.

Composición de una aplicación biyectiva y su inversa

Sea f una aplicación biyectiva de A en B, y sea f^{-1} su inversa, que es una aplicación de B en A. La aplicación compuesta $f^{-1} \circ f$ es una aplicación de A en A, y para cada $x \in A$, si $y = f(x)$, se verifica:

$$[f^{-1} \circ f](x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x,$$

teniendo en cuenta la equivalencia: $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Análogamente, la aplicación compuesta $f \circ f^{-1}$ es una aplicación de B en B, y para cada $y \in B$ se verifica: $[f \circ f^{-1}](y) = y$. En conclusión:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

CNS de aplicación biyectiva

Teorema 3 *Una condición necesaria y suficiente para que una aplicación f de A en B sea biyectiva es que exista una aplicación g de B en A tal que:*

$$g \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ g = I_B. \tag{7}$$

Demostración Si f es biyectiva, entonces $g = f^{-1}$ es una aplicación de B en A que verifica (7).

Recíprocamente, si g es una aplicación de B en A que cumple (7), entonces f es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$$

(en la última implicación se utiliza que $g \circ f = I_A$); y también f es suprayectiva: si $y \in B$, entonces $x = g(y)$ es un elemento de A cuya imagen por f es y: $f(x) = f(g(y)) = y$ (en la última igualdad se utiliza que $f \circ g = I_B$). En conclusión: f es biyectiva. C.Q.D.

Composición de aplicaciones biyectivas

Consideremos una aplicación f de A en B, y una aplicación g de B en C. Como sabemos, la aplicación compuesta $g \circ f$ está definida y es una aplicación de A en C. También sabemos que si f y g son biyectivas, entonces existen sus inversas: f^{-1}, que es de B en A, y g^{-1}, que es de C en B; y, en este caso, tiene sentido considerar la aplicación compuesta $f^{-1} \circ g^{-1}$, que es una aplicación de C en A.

Inversa de una composición

Teorema 4 *Con las notaciones anteriores, si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y su inversa es $f^{-1} \circ g^{-1}$:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demostración Si $x \in A$ y $z \in C$, y $y = f(x)$, se tienen las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} z = [g \circ f](x) &\iff z = g(f(x)) \\ &\iff y = f(x) \text{ y } z = g(y) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \text{ y } y = g^{-1}(z) \\ &\iff x = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) \\ &\iff x = \left[f^{-1} \circ g^{-1}\right](z), \end{aligned}$$

donde la primera y la última se justifican por definición de composición, y la tercera por ser f y g biyectivas. En consecuencia, podemos escribir:

$$z = [g \circ f](x) \iff x = \left[f^{-1} \circ g^{-1}\right](z), \tag{8}$$

lo cual establece que cada z perteneciente a C es la imagen por $g \circ f$ de un único elemento x de A (calculado de la forma: $x = [f^{-1} \circ g^{-1}](z)$), es decir, $g \circ f$ es biyectiva.

Por otra parte, al ser $g \circ f$ biyectiva, se tiene: $[g \circ f](x) = z \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(z) = x$, y al compararla con la de (8), se concluye: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. C.Q.D.

EJERCICIO 17 *Sean f y g, respectivamente, estas aplicaciones:*

$$x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}_+, \quad y \quad x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow 2x \in \mathbb{R}_+.$$

Demostrar que f y g son biyectivas y expresar f^{-1} y g^{-1}. Asimismo, comprobar la igualdad $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ▲

A.3 OPERACIONES

1. Ley de comosición interna u operación Sea E un conjunto no vacío. Una **ley de composición interna** definida sobre E, o una **operación** definida sobre E o, simplemente, una operación sobre E, es una aplicación de $E \times E$ en E.

Operación

Es usual representar una ley de composición interna con símbolos tales como $*$, $+$, $\circ$, $\cdot$, $\bullet$, $\star$, etc. Si la representamos, por ejemplo, con $*$, se dice que E está dotado de la ley $*$, y la imagen de un par ordenado (x, y) perteneciente a $E \times E$ por la aplicación se denota: $x * y$; gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\;*\;} & E \\ (x, y) & \dashrightarrow & x * y. \end{array}$$

De $x * y$ se dice es el resultado de **operar** (con la operación $*$) x con y.

Con la notación: $(E, *)$, suele designarse el hecho de que el conjunto no vacío E está dotado de la ley $*$.

EJEMPLO 41 Sobre cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, la adición de números es una ley de composición interna. Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$, la adición es la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\;+\;} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \dashrightarrow & x + y. \end{array}$$

La sustracción de números es ley de composición interna sobre $\mathbb{Z}$, sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, pero no lo es sobre $\mathbb{N}$; por ejemplo: $(3, 7) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pero la diferencia $3 - 7$ no es un número natural.

La multiplicación de números, como la adición, es una operación sobre cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Por ejemplo, sobre $\mathbb{Q}$:

$$(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto x \cdot y \in \mathbb{Q}.$$

Suele omitirse el signo $\cdot$ cuando no da lugar a confusión, de forma que el producto $x \cdot y$ se denota: xy.

La división de números no es ley de composición interna ni sobre $\mathbb{N}$, ni sobre $\mathbb{Z}$, ni sobre $\mathbb{Q}$, ni sobre $\mathbb{R}$; por ejemplo: $(4, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pero el cociente $4 : 0$ no está definido.

EJEMPLO 42 Sea $*$ la aplicación de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que verifica: $\forall\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a * b = a + b + ab$. Entonces $*$ es evidentemente una operación definida sobre $\mathbb{N}$. Por ejemplo:

$$1 * 2 = 1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5, \quad 0 * 1 = 0 + 1 + 0 \cdot 1 = 1, \quad \text{o} \quad 2 * 1 = 2 + 1 + 2 \cdot 1 = 5.$$

EJEMPLO 43 Designemos por I el conjunto de los números naturales impares y sea $\star$ la aplicación de $I \times I$ en I que verifica: $\forall\, (a, b) \in I \times I$, $a \star b = a^b$. Claramente, $\star$ es una operación definida sobre I, pues un número impar elevado a un número impar da como resultado un número impar. Por ejemplo: $1 \star 1 = 1^1 = 1$, $3 \star 5 = 3^5 = 243$, o $5 \star 3 = 5^3 = 125$.

2. Propiedades de una operación Sea $*$ una operación definida sobre un conjunto E.

Propiedad asociativa

Asociatividad Se dice que la operación $*$ es **asociativa** si se verifica:

$$\forall\ (a, b, c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * b) * c$$

(significando el paréntesis prioridad en la operación); es decir: es lo mismo operar a con el resultado de operar b con c, que operar primero a con b y luego operar el resultado con c.

Si la operación $*$ es asociativa, y a, b y c son elementos de E, en vez de: $a*(b*c)$, o en vez de: $(a * b) * c$, escribiremos: $a * b * c$.

EJEMPLO 44 La adición y la multiplicación de números son operaciones asociativas sobre cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. En efecto, si a, b y c son tres números, se verifica:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c.$$

La suma $a + (b + c)$ (o lo que es lo mismo: $(a + b) + c$) se denota: $a + b + c$, y el producto $a(bc)$, o el $(ab)c$, se denota: abc.

La sustracción de números no es asociativa ni sobre $\mathbb{Z}$, ni sobre $\mathbb{Q}$, ni sobre $\mathbb{R}$; por ejemplo:

$$6 - (4 - 2) = 4 \quad \text{y} \quad (6 - 4) - 2 = 0.$$

EJEMPLO 45 La operación $*$ definida sobre $\mathbb{N}$ en el ejemplo 42 (cf. p. 402) es asociativa. En efecto, si a, b y c son tres números naturales, se tiene:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc, \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + ab + c + ac + bc + abc, \end{aligned}$$

luego: $a * (b * c) = (a * b) * c$, y $*$ es asociativa. Tiene sentido la notación: $a * b * c$.

EJEMPLO 46 La operación $\star$ definida sobre el conjunto I de los números naturales impares en el ejemplo 43 (cf. p. 402) no es asociativa. Por ejemplo:

$$3 \star (1 \star 3) = 3 \star (1^3) = 3 \star 1 = 3^1 = 3, \quad \text{y} \quad (3 \star 1) \star 3 = (3^1) \star 3 = 3 \star 3 = 3^3 = 27.$$

Propiedad conmutativa

Conmutatividad Se dice que la operación $*$ es **conmutativa** si se verifica:

$$\forall\,(a,b)\in E^2,\ a*b=b*a.$$

EJEMPLO 47 La adición y la multiplicación de números son operaciones conmutativas sobre cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: si a y b son dos números, se verifica:

$$a+b=b+a \quad \text{y} \quad ab=ba.$$

EJEMPLO 48 La operación $\star$ del ejemplo 43 (cf. p. 402) no es conmutativa. Por ejemplo:

$$3\star 5=3^5=243 \quad \text{y} \quad 5\star 3=5^3=125.$$

Elemento neutro

Existencia de elemento neutro De un elemento e de E se dice es **elemento neutro** de la operación $*$ si se verifica:

$$\forall\, a\in E,\ a*e=e*a=a.$$

EJEMPLO 49 El número 0 es elemento neutro de $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{Q},+)$, y también de $(\mathbb{R},+)$: si a es un número, entonces: $a+0=0+a=a$.

El número 1 es elemento neutro de $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$ y $(\mathbb{R},\cdot)$: si a es un número, entonces: $a\cdot 1=1\cdot a=a$.

EJEMPLO 50 El número 0 es elemento neutro de la operación $*$ definida sobre $\mathbb{N}$ en el ejemplo 42 (cf. p. 402), pues si a es un número natural, entonces:

$$a*0=a+0+a\cdot 0=a \quad \text{y} \quad 0*a=0+a+0\cdot a=a.$$

EJERCICIO 18 *Demostrar que si una operación admite elemento neutro, entonces es único.* ▲

Elemento simetrizable Supongamos que la operación $*$ admite un elemento neutro e (único, de acuerdo con el ejercicio 18). Dado un elemento a de E, se dice que un elemento $\overline{a}$ de E es **simétrico** de a si se verifica:

Simétrico de un elemento

$$a*\overline{a}=\overline{a}*a=e.$$

De un elemento a de E que admite simétrico se dice es **simetrizable** (sobre $(E,*)$). Si todo elemento de E es simetrizable, se dice que la operación $*$ es simetrizable (sobre E).

Nótese que de esta definición se deduce que si a es simetrizable y de simétrico $\overline{a}$, entonces $\overline{a}$ es, a su vez, simetrizable y de simétrico a. También se deduce de la definición que el elemento neutro e es simetrizable y de simétrico él mismo.

EJEMPLO 51 Los números 8 y -2 son simetrizables sobre $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$. En efecto: -8 es simétrico de 8, y 2 es simétrico de -2:

$$8 + (-8) = (-8) + 8 = 0 \quad \text{y} \quad (-2) + 2 = 2 + (-2) = 0.$$

El número 8 no es simetrizable sobre $(\mathbb{N}, +)$ (de hecho, sólo el número 0 es simetrizable sobre $(\mathbb{N}, +)$).

La operación $+$ es simetrizable sobre $\mathbb{Z}$, sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{R}$, y no lo es sobre $\mathbb{N}$.

EJEMPLO 52 Los números 8 y -2 son simetrizables sobre $(\mathbb{Q}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, \cdot)$. En efecto: $1/8$ es simétrico de 8, y $-1/2$ es simétrico de -2:

$$8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \quad \text{y} \quad (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 1.$$

El número 8 no es simetrizable sobre $(\mathbb{N}, \cdot)$ ni sobre $(\mathbb{Z}, \cdot)$, y el número -2 no es simtrizable sobre $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

Para la multiplicación de números, el número 0 no admite simétrico.

La operación $\cdot$ es simetrizable sobre $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ y sobre $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, y no lo es sobre $\mathbb{N}$ ni sobre $\mathbb{Z}$ (ni sobre $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, ni sobre $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$).

EJERCICIO 19 *Estudiar si es simetrizable la operación $*$ definida sobre $\mathbb{Q}$ por: $a * b = a + b + ab$.* ▲

Proposición I.1 *Si $*$ es una operación sobre un conjunto E que, además de admitir elemento neutro, es asociativa, entonces cada elemento de E tiene a lo más un simétrico.*

Demostración Denotemos por e el elemento neutro de la operación $*$.

Supongamos que un elemento a de E tiene dos simétricos: $\overline{a}$ y $\overline{a}'$. Por ser $\overline{a}$ simétrico de a, se verifica: $a * \overline{a} = e$, y por tanto: $\overline{a}' * (a * \overline{a}) = \overline{a}' * e = \overline{a}'$. Y, por otro lado, por ser $\overline{a}'$ simétrico de a, se verifica: $\overline{a}' * a = e$, y por tanto: $(\overline{a}' * a) * \overline{a} = e * \overline{a} = \overline{a}$. Pero la propiedad asociativa nos asegura: $\overline{a}' * (a * \overline{a}) = (\overline{a}' * a) * \overline{a}$. Así: $\overline{a}' = \overline{a}$. C.Q.D.

EJEMPLO 53 Para la adición de números (que es asociativa), *el* simétrico de un número real x es su
Opuesto **opuesto**: $-x$.

Para la multiplicación de números (también asociativa), *el* simétrico de un número real x
Inverso *no nulo* es su **inverso**: $1/x$.

Nota A veces se utiliza el signo $+$ para representar una operación abstracta sobre un conjunto E. En este caso, al simétrico de un elemento a, si existe y es único, se le llama **opuesto** de a y se le denota: $-a$; y si $x \in E$, se escribe: $x - a$ en vez de: $x + (-a)$. Además, si la operación es asociativa, la notación: na (donde $a \in E$ y n es un número natural mayor o igual que 1 —o bien: $n \in \mathbb{N}^*$—) designa el resultado de operar a consigo mismo n veces: $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}}$.

Otras veces también se utiliza el signo $\cdot$ para representar una operación abstracta sobre un conjunto. En este caso, al simétrico de a, si existe y es único, se le llama **inverso** de a y se le denota: a^{-1}, o también: $1/a$. Y si la operación es asociativa, la notación: a^n (con $a \in E$ y $n \in \mathbb{N}^*$) designa el resultado de operar a consigo mismo n veces; esto es: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$. ▲

Grupo

3. Grupos Un **grupo** $(E, *)$ es un conjunto no vacío E dotado de una ley de composición interna $*$ que verifica las tres siguientes propiedades:

(G1) es asociativa: $\forall\, (a, b, c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * b) * c$;

(G2) posee un elemento neutro e: $\forall\, a \in E,\ a * e = e * a = a$;

(G3) es simetrizable: $\forall\, a \in E,\ \exists\, \overline{a} \in E,\ a * \overline{a} = \overline{a} * a = e$.

Si la operación $*$ además verifica:

(G4) es conmutativa: $\forall\, (a, b) \in E^2,\ a * b = b * a$,

Grupo conmutativo

entonces del grupo se dice es **conmutativo** o **abeliano**.

EJEMPLO 54 Se tiene que $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ son grupos abelianos.

Sin embargo, $(\mathbb{N}, -)$ no es grupo, porque ningún número natural distinto de 0 es simetrizable. Tampoco $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ es un grupo, ya que ningún número entero distinto de 1 y de -1 es simetrizable.

EJERCICIO 20 *Consideremos sobre $\mathbb{Q}$ la operación $*$ que verifica:*

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ a * b = a + b + ab.$$

Demostrar se tiene: $\forall\, (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ (a * b = -1) \Rightarrow \big((a = -1) \text{ o } (b = -1)\big)$. Estudiar, además, si la restricción de la operación $*$ al conjunto $\mathbb{Q} - \{-1\}$ lo articula como grupo abeliano. ▲

Escolio Si $*$ es una operación definida sobre un conjunto E, y F es un subconjunto de E, la **restricción** de la operación $*$ al conjunto F define una operación sobre F precisamente si el resultado de operar dos elementos cualesquiera de F es un elemento de F:

$$\forall\, (x, y) \in F \times F,\ x * y \in F.$$

En este caso, la operación sobre F es la aplicación: $(x, y) \in F \times F \longrightarrow x * y \in F$. ▲

EJERCICIO 21 *Sobre $\mathbb{R}^2$ consideremos la operación + dada por: $(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ (adición término a término). Demostrar que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano.* ▲

Nota Si sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$ y natural) consideramos la operación + dada por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

(adición término a término), entonces se prueba, análogamente a como se hace en el ejercicio 21, que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano. ▲

Cuerpo

4. Cuerpos Un **cuerpo** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un conjunto $\mathbb{K}$ dotado de dos leyes de composición internas + y $\cdot$ que verifican:

a) La operación + es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (que se denota: 0), y es simetrizable (el simétrico de un elemento α de $\mathbb{K}$ se denota: $-\alpha$, y se llama **opuesto** de α); esto es: $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.

b) La operación $\cdot$ es asociativa, tiene un elemento neutro distinto de 0 (que se denota: 1), y todo elemento α de $\mathbb{K}$ distinto de 0 tiene un simétrico (que se denota: α^{-1}, o también: $1/\alpha$, y se llama **inverso** de α).[5]

c) La operación $\cdot$ es **distributiva** respecto de la operación +, esto es, se verifica:

$$\forall\,(a,b,c) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}, \begin{cases} a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \\ \text{y} \\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c. \end{cases}$$

Cuerpo conmutativo

Si la operación $\cdot$ también es conmutativa, del cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se dice es **conmutativo**.

EJEMPLO 55 Se verifica que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ son cuerpos conmutativos. También $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos,[6] es un cuerpo conmutativo.

Propiedades de un cuerpo Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Se verifica:

1) Para todo elemento α de $\mathbb{K}$, se verifica:

$$\alpha\cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 0\cdot\alpha = 0.$$

Como 0 es el elemento neutro de la operación +, se verifica: $0 = 0 + 0$, y utilizando la propiedad distributiva se tiene: $\alpha\cdot 0 = \alpha\cdot(0+0) = \alpha\cdot 0 + \alpha\cdot 0$. En la igualdad: $\alpha\cdot 0 + \alpha\cdot 0 = \alpha\cdot 0$, operamos en ambos miembros con el opuesto de $\alpha\cdot 0$, es decir, con $-(\alpha\cdot 0)$: $\alpha\cdot 0 + \alpha\cdot 0 - (\alpha\cdot 0) = \alpha\cdot 0 - (\alpha\cdot 0)$, de donde: $\alpha\cdot 0 = 0$. De forma análoga probaríamos que $0\cdot\alpha = 0$.

---

[5] Cf. nota p. 406.

[6] Los números complejos no se estudian en este curso, pero es muy probable que el lector los conozca de Bachillerato o del Curso de Acceso. En todo caso, aquí sólo se citan.

2) *Para todo elemento α de $\mathbb{K}$, se verifica:*

$$(-1)\cdot\alpha = -\alpha \quad y \quad \alpha\cdot(-1) = -\alpha.$$

Es decir: se obtiene el opuesto de α operando (con la operación $\cdot$) el opuesto de 1 con α.

Como 1 es el elemento neutro de la operación $\cdot$, se tiene: $\alpha = 1\cdot\alpha$, y utilizando la propiedad distributiva y la propiedad anterior, se obtiene:

$$\alpha + (-1)\cdot\alpha = 1\cdot\alpha + (-1)\cdot\alpha = \big(1+(-1)\big)\cdot\alpha = 0\cdot\alpha = 0,$$

con lo que $(-1)\cdot\alpha$ es el opuesto de α, es decir: $(-1)\cdot\alpha = -\alpha$. De forma análoga probaríamos que $\alpha\cdot(-1) = -\alpha$.

3) *Si α y β son dos elementos de $\mathbb{K}$ distintos de 0, entonces $\alpha\cdot\beta$ también es distinto de 0.*

Como α es distinto de 0, tiene inverso: $1/\alpha$, y se verifica:

$$\beta = 1\cdot\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)\cdot\beta = \frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha\cdot\beta);$$

si $\alpha\cdot\beta$ fuera igual a 0, con la primera propiedad se deduciría que β sería igual a 0, en contra de la hipótesis.

Escolio Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un cuerpo, la restricción de la operación $\cdot$ al conjunto $\mathbb{K}^*$ (donde: $\mathbb{K}^* = \{\alpha\in\mathbb{K} \mid \alpha\neq 0\}$) lo articula como grupo (abeliano si el cuerpo es conmutativo). En efecto. De acuerdo con la propiedad (3), la restricción de la operación $\cdot$ a $\mathbb{K}^*$ es efectivamente una operación sobre $\mathbb{K}^*$ (cf. escolio p. 406). Esta restricción es, obviamente, una operación asociativa (y conmutativa si el cuerpo es conmutativo), admite elemento neutro: 1 (pues: $1\in\mathbb{K}^*$), y cada elemento α de $\mathbb{K}^*$ admite un simétrico en $\mathbb{K}^*$: $1/\alpha$ (pues: $1/\alpha\neq 0$); es decir: el conjunto $\mathbb{K}^*$ dotado de esta operación es un grupo, que es abeliano si el cuerpo es conmutativo. ▲

Nota A partir de ahora, cuando en este texto consideremos un cuerpo supondremos implícitamente que éste contiene el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. (El cuerpo de los números reales, por ejemplo, verifica esta propiedad.) ▲

5. Ley de composición externa u operación externa Sean E y K dos conjuntos no vacíos. Una **ley de composición externa** definida sobre E para K, o una **operación externa** definida sobre E para K o, simplemente, una operación externa sobre E para K, es una aplicación de $K\times E$ en E.

Operación externa

Es usual representar una ley de composición externa con un símbolo (por ejemplo: $\bullet$) de forma análoga a como se hizo con las leyes de composición internas:

$$\begin{array}{ccc} K\times E & \xrightarrow{\;\bullet\;} & E \\ (\lambda,x) & \dashrightarrow & \lambda\bullet x. \end{array}$$

EJEMPLO 56 La aplicación $\bullet$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que verifica: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z \in \mathbb{Z},\ n \bullet z = z^n$, es una operación externa sobre $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{N}^*$. Por ejemplo:

$$2 \bullet (-3) = (-3)^2 = 9, \quad 6 \bullet 0 = 0^6 = 0.$$

EJEMPLO 57 La aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que verifica:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \bullet (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

es una ley de composición externa definida sobre $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$.

Nota En lo sucesivo, nos interesaremos únicamente por operaciones externas definidas *sobre un grupo para un cuerpo.* Y en este contexto, adoptaremos los siguientes convenios de notación. Si $(E,+)$ es el grupo, representaremos sus elementos por letras en negrita:

$$\boldsymbol{x} \in E, \quad \boldsymbol{u} \in E, \ldots,$$

y en particular su elemento neutro será denotado: $\mathbf{0}$. Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es el cuerpo, representaremos sus elementos por letras griegas:

$$\alpha \in \mathbb{K}, \quad \beta \in \mathbb{K}, \ldots,$$

y utlizaremos la notación general que se introdujo en la definición de cuerpo en la sección 4 (cf. p. 407). Nótese que no distinguiremos el signo $+$ de la operación sobre E del signo $+$ de la operación sobre $\mathbb{K}$; la práctica muestra que no da lugar a confusión. ▲

Propiedades de una ley de composición externa Consideremos un grupo $(E,+)$ y un cuerpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$, y sea $\bullet$ una ley de composición externa definida sobre E para $\mathbb{K}$:

$$(\lambda, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{K} \times E \longrightarrow \lambda \bullet \boldsymbol{x} \in E.$$

De la ley de composición externa $\bullet$ diremos es:

(L1) **asociativa en los elementos de** $\mathbb{K}$ si:

$$\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \alpha \bullet (\beta \bullet \boldsymbol{x}) = (\alpha \cdot \beta) \bullet \boldsymbol{x};$$

(L2) **distributiva respecto de la operación** $+$ **de** $\mathbb{K}$ si:

$$\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ (\alpha + \beta) \bullet \boldsymbol{x} = \alpha \bullet \boldsymbol{x} + \beta \bullet \boldsymbol{x};$$

(L3) **distributiva respecto de la operación** $+$ **de** E si:

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in E^2,\ \alpha \bullet (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \bullet \boldsymbol{x} + \alpha \bullet \boldsymbol{y};$$

(L4) **neutra para el elemento** 1 (del cuerpo) si: $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ 1 \bullet \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

EJEMPLO 58 Retomemos la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ en el ejemplo 57 (cf. p. 409):

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \bullet (x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Demostramos que $\bullet$ verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4) (en lo que sigue, los números escritos encima de los signos de igualdad hacen referencia a las definiciones o propiedades que las justifican, con el siguiente significado: (1) definición de la operación externa $\bullet$, (2) propiedad asociativa de la multiplicación de números reales, (3) propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición de números reales, y (4) definición de adición de pares ordenados de números reales):

- (L1): Si α y β son dos números reales arbitrarios y (x,y) es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha \bullet (\beta \bullet (x,y)) &\overset{(1)}{=} \alpha \bullet (\beta x, \beta y) \overset{(1)}{=} (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) \\ &\overset{(2)}{=} ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) \overset{(1)}{=} (\alpha\beta) \bullet (x,y). \end{aligned}$$

- (L2): Si α y β son dos números reales arbitrarios y (x,y) es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta) \bullet (x,y) &\overset{(1)}{=} ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y) \overset{(3)}{=} (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) \\ &\overset{(4)}{=} (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) \overset{(1)}{=} \alpha \bullet (x,y) + \beta \bullet (x,y). \end{aligned}$$

- (L3): Si α es un número real arbitrario y (x,y) y (z,t) son dos elementos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha \bullet ((x,y) + (z,t)) &\overset{(4)}{=} \alpha \bullet (x+z, y+t) \overset{(1)}{=} (\alpha(x+z), \alpha(y+t)) \\ &\overset{(3)}{=} (\alpha x + \alpha z, \alpha y + \alpha t) \overset{(4)}{=} (\alpha x, \alpha y) + (\alpha z, \alpha t) \\ &\overset{(1)}{=} \alpha \bullet (x,y) + \alpha \bullet (z,t). \end{aligned}$$

- (L4): Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces: $1 \bullet (x,y) \overset{(1)}{=} (1x, 1y) = (x,y)$.

EJEMPLO 59 De manera similar a como se acaba de hacer en el ejemplo anterior, podemos probar que la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \bullet (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

también verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4).

En general, si n es un número natural positivo, la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \bullet (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4).

EJEMPLO 60 Si consideramos el grupo $(\mathbb{R}^2, +)$ y el cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (de los números racionales), la ley de composición externa $\star$ definida sobre $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{Q}$ de la forma:

$$\forall \lambda \in \mathbb{Q},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \star (x, y) = (\lambda x, 0)$$

verifica las propiedades (L1), (L2) y (L3):

- ◇ (L1): Si α y β son dos números racionales arbitrarios y (x, y) es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\alpha \star (\beta \star (x, y)) = \alpha \star (\beta x, 0) = (\alpha(\beta x), 0) = ((\alpha\beta)x, 0) = (\alpha\beta) \star (x, y).$$

- ◇ (L2): Si α y β son dos números racionales arbitrarios y (x, y) es un par ordenado arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$(\alpha + \beta) \star (x, y) = ((\alpha + \beta)x, 0) = (\alpha x, 0) + (\beta x, 0) = \alpha \star (x, y) + \beta \star (x, y).$$

- ◇ (L3): Si α es un número racional arbitrario y (x, y) y (z, t) son dos pares ordenados arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned}\alpha \star ((x, y) + (z, t)) &= \alpha \star (x + z, y + t) = (\alpha(x + z), 0)\\ &= (\alpha x, 0) + (\alpha z, 0) = \alpha \star (x, y) + \alpha \star (z, t).\end{aligned}$$

Sin embargo, $\star$ no verifica la propiedad (L4); por ejemplo: $1 \star (2, 3) \neq (2, 3)$, pues se tiene: $1 \star (2, 3) = (1 \cdot 2, 0) = (2, 0)$.

Podemos preguntarnos si para cualquier grupo E y cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ es posible definir una ley de composición externa sobre E para $\mathbb{K}$ que verifique las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4). La respuesta es negativa, como muestra el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 22 *Considerando el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ y el cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, demostrar que no es posible definir una operación externa sobre $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ que verifique las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4).* ▲

Consecuencia de las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4) Algo sorprendente es el resultado siguiente: si la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre E para $\mathbb{K}$ verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4), entonces *el grupo $(E, +)$ es necesariamente abeliano.*

En efecto (sobre algunas de las igualdades que aparecen a continuación escribimos una referencia a la propiedad que las justifica). Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ dos elementos arbitrarios de E. Por un lado, se tiene:

$$(1 + 1) \bullet (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(L2)}{=} 1 \bullet (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + 1 \bullet (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(L4)}{=} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

y por otro lado:

$$(1+1)\bullet(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \overset{(L3)}{=} (1+1)\bullet\boldsymbol{x}+(1+1)\bullet\boldsymbol{y} \overset{(L2),(L4)}{=} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y};$$

y en consecuencia: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}$. Operando con $-\boldsymbol{x}$ por la izquierda, es decir: $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}$, resulta: $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}$; y operando ahora con $-\boldsymbol{y}$ por la derecha: $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}$, obtenemos: $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$. En conclusión, se verifica:

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in E^2,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},$$

es decir, la operación $+$ es conmutativa, y $(E,+)$ es un grupo abeliano.

Otras consecuencias Si la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre E para $\mathbb{K}$ verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4), entonces se tiene:

(P1) $\forall\,\boldsymbol{x}\in E,\ 0\bullet\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

En efecto. Sea $\boldsymbol{x}$ un elemento arbitrario de E. Por ser 0 el elemento neutro de $(\mathbb{K},+)$, se tiene: $1+0=1$, de donde:

$$(1+0)\bullet\boldsymbol{x} = 1\bullet\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Ahora bien, el primer miembro de (9) verifica:

$$(1+0)\bullet\boldsymbol{x} \overset{(L2)}{=} 1\bullet\boldsymbol{x}+0\bullet\boldsymbol{x} \overset{(L4)}{=} \boldsymbol{x}+0\bullet\boldsymbol{x},$$

y el segundo: $1\bullet\boldsymbol{x} \overset{(L4)}{=} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}$, ya que $\boldsymbol{0}$ es el elemento neutro de $(E,+)$. En consecuencia, de (9) se deduce: $\boldsymbol{x}+0\bullet\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}$, y operando por la izquierda con el opuesto de $\boldsymbol{x}$, es decir: $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+0\bullet\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}$, se obtiene: $0\bullet\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(P2) $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda\bullet\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

Sea λ un elemento arbitrario de $\mathbb{K}$. De la igualdad: $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$ se deduce:

$$\lambda\bullet\boldsymbol{0} = \lambda\bullet(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) \overset{(L3)}{=} \lambda\bullet\boldsymbol{0}+\lambda\bullet\boldsymbol{0};$$

y operando por la izquierda con el opuesto de $\lambda\bullet\boldsymbol{0}$, esto es:

$$-(\lambda\bullet\boldsymbol{0})+\lambda\bullet\boldsymbol{0} = -(\lambda\bullet\boldsymbol{0})+\lambda\bullet\boldsymbol{0}+\lambda\bullet\boldsymbol{0},$$

se concluye: $\lambda\bullet\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

(P3) $\forall\,\boldsymbol{x}\in E,\ -\boldsymbol{x} = (-1)\bullet\boldsymbol{x}$.

En efecto, se tiene:

$$\boldsymbol{x}+(-1)\bullet\boldsymbol{x} \overset{(L4)}{=} 1\bullet\boldsymbol{x}+(-1)\bullet\boldsymbol{x} \overset{(L2)}{=} (1+(-1))\bullet\boldsymbol{x} = 0\bullet\boldsymbol{x} \overset{(P1)}{=} \boldsymbol{0},$$

luego: $\boldsymbol{x}+(-1)\bullet\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, es decir, el opuesto de $\boldsymbol{x}$ es igual a $(-1)\bullet\boldsymbol{x}$, o lo que es lo mismo: $-\boldsymbol{x} = (-1)\bullet\boldsymbol{x}$.

$$\textit{(P4)}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \lambda \bullet \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \quad o \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Si se verifica: $\lambda \bullet \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, y ocurriese que $\lambda \neq 0$, entonces λ tendría inverso: λ^{-1}, y se deduciría: $\lambda^{-1} \bullet (\lambda \bullet \boldsymbol{x}) = \lambda^{-1} \bullet \mathbf{0}$. Pero:

$$\lambda^{-1} \bullet (\lambda \bullet \boldsymbol{x}) \overset{(L1)}{=} (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \bullet \boldsymbol{x} = 1 \bullet \boldsymbol{x} \overset{(L4)}{=} \boldsymbol{x},$$

y por otro lado: $\lambda^{-1} \bullet \mathbf{0} \overset{(P2)}{=} \mathbf{0}$, y en consecuencia: $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. En conclusión, hemos demostrado:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \lambda \bullet \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \quad o \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lo que queda por probar es inmediato: si $\lambda = 0$, entonces: $\lambda \bullet \boldsymbol{x} = 0 \bullet \boldsymbol{x} \overset{(P1)}{=} \mathbf{0}$; y si $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces: $\lambda \bullet \boldsymbol{x} = \lambda \bullet \mathbf{0} \overset{(P2)}{=} \mathbf{0}$.

Recopilamos en el siguiente cuadro las consecuencias vistas de las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4):

> Si la ley de composición externa $\bullet$ definida sobre E para $\mathbb{K}$ verifica (L1), (L2), (L3) y (L4), entonces el grupo $(E, +)$ es necesariamente abeliano, y se verifica:
>
> *(P1)* $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ 0 \bullet \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,
>
> *(P2)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$,
>
> *(P3)* $\forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ -\boldsymbol{x} = (-1) \bullet \boldsymbol{x}$,
>
> $$\textit{(P4)}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E,\ \lambda \bullet \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \quad o \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

A.4 POLINOMIOS

Polinomio con coeficientes [illegible]

1. Definiciones Se llama **polinomio en una indeterminada y con coeficientes reales** a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y donde x designa una variable (o indeterminada) que puede tomar valores reales. De $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se dice son los **coeficientes** de grado $0, 1, \ldots, n$, respectivamente, de $P(x)$. Si $m > n$, se dice que el coeficiente de grado m de $P(x)$ es igual a 0.

De un polinomio se dice es **nulo** si todos sus coeficientes son iguales a 0.

Si b es un número real, el número real que se obtiene sustituyendo x por b en la expresión de $P(x)$ se denota por $P(b)$:

$$P(b) = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n.$$

Si no da lugar a confusión, se denotará el polinomio $P(x)$ simplemente por la letra P.

Los polinomios en la indeterminada x y con coeficientes reales constituyen un conjunto, que se denota: $\mathbb{R}[x]$.

Nota En este capítulo sólo trataremos polinomios con coeficientes reales, aunque se pueden tratar de forma análoga los polinomios con coeficientes complejos, que forman un conjunto que se denota: $\mathbb{C}[x]$. En general, el conjunto de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{K}$, donde $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, se denota: $\mathbb{K}[x]$. ▲

EJEMPLO 61 Consideremos el polinomio:

$$P(x) = 1 + 2x - x^3.$$

Los coeficientes no nulos del polinomio $P(x)$ son: el de grado 0: $a_0 = 1$; el de grado 1: $a_1 = 2$; y el de grado 3: $a_3 = -1$. También se verifica:

$$P(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 1^3 = 2, \quad P(-1) = 1 + 2(-1) - (-1)^3 = 0, \quad P(0) = 1 + 2 \cdot 0 - 0^3 = 1.$$

Grado de un polinomio

Grado Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ es un polinomio no nulo, al menos alguno de sus coeficientes de grado menor o igual que n es distinto de 0 (los de grado mayor que n son iguales a 0). Se define el grado del polinomio no nulo:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

que se denota: grado$\,P$, como el mayor número natural p tal que: $a_p \neq 0$; es decir, que el grado de P es p significa:

$$a_p \neq 0, \quad \text{y} \quad a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_n = 0.$$

Si el polinomio P es nulo, no está definido su grado (aunque algunos autores lo definen como igual a $-\infty$).

EJEMPLO 62 El polinomio P del ejemplo 61 es de grado 3.

El grado del polinomio $Q(x) = 4$ es igual a 0.

Igualdad de polinomios Dos polinomios no nulos:

$$A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{y} \quad B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m,$$

Igualdad de polinomios

son **iguales**, y se escribe: $A = B$, si

$$\text{grado}\, A = \text{grado}\, B = p \quad (\text{con } p \leqslant n \text{ y } p \leqslant m),$$

y

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_p = b_p,$$

o en notación más abreviada:

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, \ldots, p.$$

Si A y B son dos polinomios nulos, son iguales, y ambos se denotan: $\mathbf{0}$, es decir, se escribe: $A = B = \mathbf{0}$.

2. Operaciones con polinomios Sean A y B dos polinomios de grado menor o igual que n: $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Se define la **suma** de los polinomios A y B, que se denota: $A + B$, de la forma:

Adición de polinomios

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n,$$

donde:

$$c_j = a_j + b_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Nótese que $A + B$ es otro polinomio.

EJEMPLO 63 Dados los polinomios $A(x) = 1 - 6x^2 + 7x^3$ y $B(x) = -1 + x + 6x^2 - 7x^{10}$, su suma es el polinomio:

$$\begin{aligned}(A + B)(x) = A(x) + B(x) &= (1 - 6x^2 + 7x^3) + (-1 + x + 6x^2 - 7x^{10}) \\ &= x + 7x^3 - 7x^{10}.\end{aligned}$$

El grupo abeliano de los polinomios con la adición

De la definición dada en el apartado anterior se deduce sin dificultad alguna lo siguiente sobre la adición de polinomios:

1) Es una *operación* sobre $\mathbb{R}[x]$.

2) Es una operación *asociativa* y *conmutativa*.

3) Admite *elemento neutro*: el polinomio nulo.

4) Cada polinomio $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ perteneciente a $\mathbb{K}[x]$ admite un *simétrico* (u *opuesto*): el polinomio $-A$, definido de la forma:

$$(-A)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n.$$

En conclusión: $(\mathbb{R}[x], +)$ es un *grupo abeliano.*

Multiplicación de un número real por un polinomio

Si α es un número real y A es el polinomio: $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, se define el **producto del número α por el polinomio** A, que se denota: αA, como el polinomio:

$$(\alpha A)(x) = \alpha A(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n,$$

donde:

$$d_j = \alpha a_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Observe el lector que el polinomio opuesto del polinomio A es igual a $-1A$, es decir: $-A = -1A$.

EJEMPLO 64 Dado el polinomio: $A(x) = 1 + x + 2x^2$, el polinomio $-3A$ es: $-3A(x) = -3 - 3x - 6x^2$; el polinomio $0A$ es el polinomio nulo: $0A = \mathbf{0}$.

Multiplicación de polinomios

Sean $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ dos polinomios de grado menor o igual que n. Se define el **producto** de A por B, que se denota: AB, como el polinomio:

$$(AB)(x) = A(x)B(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_{2n-1}x^{2n-1} + e_{2n}x^{2n},$$

donde:

$$\begin{aligned}
e_0 &= a_0b_0,\\
e_1 &= a_0b_1 + a_1b_0,\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
e_j &= a_jb_0 + \cdots + a_kb_{j-k} + \cdots + a_0b_j,\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
e_{2n-1} &= a_nb_{n-1} + a_{n-1}b_n,\\
e_{2n} &= a_nb_n;
\end{aligned}$$

de forma general: $e_j = \sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n.$

EJEMPLO 65 El producto de los polinomios: $A(x) = 1 + x - x^3$ y $B(x) = 2 - x$ es:

$$\begin{aligned}(AB)(x) = (1 + x - x^3)(2 - x) &= 2 + (-1 + 2)x + (-1)x^2 + (-2)x^3 + x^4 \\ &= 2 + x - x^2 - 2x^3 + x^4.\end{aligned}$$

El producto de los polinomios: $-1 + x^{10}$ y $1 + x^{10}$ es el polinomio: $-1 + x^{20}$.

La multiplicación de polinomios es una *operación* sobre $\mathbb{R}[x]$ que es *asociativa, conmutativa* y *distributiva respecto de la adición*. La demostración (tan simple como fastidiosa) se deja como ejercicio al lector. Esta operación también admite *elemento neutro*: el polinomio $P(x) = 1$, que se denota: $\mathbf{1}$.

Finalmente, es obvio que todo polinomio de $\mathbb{R}[x]$ de grado mayor o igual que 1 no admite simétrico (respecto de la multiplicación). El conjunto $\mathbb{R}[x]$ dotado de las operaciones adición y multiplicación *no* es un cuerpo.[7]

EJERCICIO 23 *Consideremos dos polinomios P y Q de grados p y q, respectivamente. Demostrar que su producto: PQ, es un polinomio de grado $p + q$.* ▲

3. División de polinomios. Cero o raíz de un polinomio Consideremos dos polinomios A y B, que llamaremos **dividendo** y **divisor**, respectivamente, y supongamos que B es *no nulo* y denotemos su grado por b. La **división euclidiana** de A por B es la búsqueda de dos polinomios Q y R, llamados **cociente** y **resto**, respectivamente, tales que:

División de polinomios

$$A = BQ + R, \quad \text{con } R = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \text{grado}\, R < b.$$

Se prueba que, en las hipótesis precedentes, Q y R existen y son únicos.

Se dice que el polinomio A es **divisible** por el polinomio B si el resto R de la división euclidiana de A por B es el polinomio nulo: $R = \mathbf{0}$.

Raíz de un polinomio

Se dice que un número real α es un **cero**, o una **raíz**, del polinomio A si: $A(\alpha) = 0$.

Proposición I.2 *Para que un polinomio $A(x)$ sea divisible por el polinomio (de grado 1) $(x - \alpha)$ es necesario y suficiente que α sea un cero de $A(x)$.*

Demostración Sean $Q(x)$ y $R(x)$ el cociente y el resto, respectivamente, de la división euclidiana de $A(x)$ por $(x - \alpha)$. Es decir, se tiene:

$$A(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x), \tag{10}$$

donde $R = \mathbf{0}$, o bien: $\text{grado}\, R = 0$ (pues: $\text{grado}\, R < \text{grado}(x - \alpha) = 1$).

[7] Las operaciones adición y multiplicación articulan el conjunto $\mathbb{R}[x]$ como un *anillo*. No estudiaremos en este texto este tipo de estructura algebraica.

Si α es un cero de $A(x)$, es decir: $A(\alpha) = 0$, sustituyendo en (10) se obtiene:

$$0 = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R(\alpha),$$

luego: $R(\alpha) = 0$, y por tanto: $R = \mathbf{0}$ (ya que R es nulo o de grado 0). Esto es: $A(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$.

Recíprocamente, si $A(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$, es decir: $R = \mathbf{0}$, de (10) se deduce:

$$A(x) = (x - \alpha)Q(x),$$

y si hacemos: $x = \alpha$, se obtiene: $A(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$, y α es un cero de $A(x)$. C.Q.D.

Corolario *Si P es un polinomio de grado $p \geqslant 1$ y α es una raíz de P, entonces existe un polinomio Q de grado $p - 1$ tal que:*

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x). \tag{11}$$

Demostración Si α es una raíz de $P(x)$, entonces (cf. proposición anterior) el polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio $(x - \alpha)$, y al llevar a cabo la división euclidiana del primero por el segundo se obtiene una expresión de la forma (11).

Por otro lado, de (11) se deduce que el grado de $P(x)$ es la suma del grado de $(x - \alpha)$ —que es 1— y el grado de $Q(x)$ (cf. ejercicio 23, p. 417). En consecuencia:

$$\operatorname{grado} Q = \operatorname{grado} P - \operatorname{grado}(x - \alpha) = p - 1.$$

C.Q.D.

EJERCICIO 24 *Si A es el polinomio: $A(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$, con la notación $A(x+1)$ se designa:*

$$A(x+1) = d + c(x+1) + b(x+1)^2 + a(x+1)^3.$$

Encontrar un polinomio A de grado 3 tal que: $A(x+1) - A(x) = x^2$. Deducir de ello la igualdad:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

▲

A.5 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 378) Se cumple: $A \underset{(a)}{\neq} C \underset{(b)}{\neq} D \underset{(c)}{\neq} B \underset{(d)}{=} A$, y se justifica de la siguiente manera:

a) $\{3\} \in C$, pero $\{3\} \notin A$; o también: $3 \in A$, pero $3 \notin C$;

b) $2 \in C$, pero $2 \notin D$;

c) $3 \in B$, pero $3 \notin D$;

d) cada elemento de A también es elemento de B, y cada elemento de B también es elemento de A.

Note el lector que lo escrito anteriormente está escrito implícitamente que $A \neq D$, y también que $B \neq C$. Finalmente, los cardinales de A, B, C y D son:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \text{Card}(C) = 4 \quad \text{y} \quad \text{Card}(D) = 3.$$

Ejercicio 2 (p. 379) Se tiene:

a) Si $X \subseteq A$, entonces X debe ser A, D, E o F. Si añadimos: $X \subseteq B$, entonces sólo puede ser $X = D$.

b) Los conjuntos que verifican no estar contenidos en B son: A, C, E y F. Si además pedimos ser subconjunto de C, entonces nos quedan: C, E y F.

c) De forma anóloga se comprueba que en este caso debe ser $X = B$.

d) También se comprueba que en este caso sólo puede ser $X = B$ o $X = D$.

Ejercicio 3 (p. 380) Por un lado, podemos escribir:

$$A \subset B \longrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ A \neq B. \end{cases} \tag{12}$$

En efecto, por definición de contenido estricto podemos escribir:

$$A \subset B \longrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ B \nsubseteq A, \end{cases}$$

y de: $B \nsubseteq A$ se obtiene, en particular, que $A \neq B$.

Por otro lado, también se puede escribir:

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ A \neq B \end{cases} \longrightarrow A \subset B. \tag{13}$$

En efecto: si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces hay algún elemento de B que no partenece a A, es decir: $B \nsubseteq A$; y ($A \subseteq B$ y $B \nsubseteq A$) es la definición de: $A \subset B$.

Finalmente, de acuerdo con (12) y (13) podemos concluir:

$$A \subset B \longleftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ \text{y} \\ A \neq B. \end{cases}$$

Ejercicio 4 (p. 381) Se tiene:

a) $A - B = \{1, 3, 5\}$;

b) $C - A = \{6\}$;

c) $B - C = \{2, 8, 10\}$;

d) $B - A = \{6, 8, 10\}$;

e) el conjunto $B - B$ es vacío: $B - B = \emptyset$.

Ejercicio 5 (p. 382) Si $x \in A$, entonces $x \notin B$, ya que —al ser $A \cap B = \emptyset$— ningún elemento puede pertenecer a A y a B a la vez. Por el mismo motivo, si $x \in B$, entonces $x \notin A$.

Por otra parte, aplicando (1) (cf. p. 378) a los conjuntos A y E, se tiene: $A \subseteq E$ es lo mismo que $x \in A \longrightarrow x \in E$. Teniendo en cuenta lo recién demostrado: $x \in A \longrightarrow x \notin B$, podemos, pues, escribir:

$$x \in A \longrightarrow \begin{cases} x \in E \\ \text{y} \\ x \notin B \end{cases} \longrightarrow x \in \complement_E B,$$

de lo que se concluye: $A \subseteq \complement_E B$.

Ejercicio 6 (p. 382) Recordando (1) (cf. p. 378): $A \subseteq B$ es lo mismo que $x \in A \longrightarrow x \in B$, podemos escribir:

$$x \in A \cap C \longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{y} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \in B \\ \text{y} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow x \in B \cap C,$$

de lo que se concluye: $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Ejercicio 7 (p. 382) Por un lado, podemos escribir: $A \subseteq B \longrightarrow A \cap B = A$. En efecto, de acuerdo con lo probado en el ejercicio 6 (cf. p. 382), y con las propiedades de la intersección de conjuntos (cf. p. 382), se tiene:

$$A \subseteq B \longrightarrow A \cap A \subseteq B \cap A \longrightarrow A \subseteq A \cap B \longrightarrow A = A \cap B,$$

donde el último paso se justifica teniendo en cuenta que $A \cap B \subseteq A$ (lo que se verifica cualesquiera que sean los subconjuntos A y B de E).

Por otro lado, también: $A \cap B = A \longrightarrow A \subseteq B$. En efecto, se verifica: $A \cap B \subseteq B$ (de nuevo, una propiedad general de la intersección de conjuntos), así que si $A \cap B = A$, entonces: $A = A \cap B \subseteq B$.

Finalmente, una vez hemos comprobado:

$$A \subseteq B \longrightarrow A \cap B = A \quad \text{y} \quad A \cap B = A \longrightarrow A \subseteq B,$$

podemos escribir: $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cap B = A$.

Ejercicio 8 (p. 382) La primera igualdad es una consecuencia inmediata de las definiciones de diferencia e intersección:

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \notin B\} \\ &= \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \in \complement_E B\} = A \cap \complement_E B. \end{aligned}$$

La otra igualdad se deduce fácilmente de la anterior:

$$(\complement_E B) - (\complement_E A) = (\complement_E B) \cap \complement_E (\complement_E A) = (\complement_E B) \cap A = A - B.$$

(Hemos utilizado las propiedades enunciadas en el cuadro de la página 381.)

Ejercicio 9 (p. 383) Recordando (1) (cf. p. 378), podemos escribir:

$$x \in A \cup C \longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{o} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \in B \\ \text{o} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow x \in B \cup C,$$

de lo que se concluye: $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Ejercicio 10 (p. 383) Si $\complement_E A \cup B = E$, entonces para cualquier elemento x de E ocurre:

$$x \in \complement_E A \quad \text{o} \quad x \in B,$$

y en consecuencia podemos escribir:

$$x \in \complement_E B \longrightarrow \begin{cases} x \in E \\ \text{y} \\ x \notin B \end{cases} \longrightarrow x \in \complement_E A,$$

de lo que se deduce: $\complement_E A \supseteq \complement_E B$.

Ejercicio 11 (p. 383) Por un lado: $A \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B$. En efecto, de acuerdo con el ejercicio 9 (cf. p. 383) y teniendo en cuenta las propiedades de la unión de conjuntos (cf. p. 383), se tiene:

$$A \subseteq B \longrightarrow A \cup B \subseteq B \cup B \longrightarrow A \cup B \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B.$$

Por otro lado: $A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$. En efecto, como $A \cup B \supseteq A$ (propiedad de la unión de conjuntos), si $A \cup B = B$, entonces: $B = A \cup B \supseteq A$.

Finalmente, una vez hemos comprobado:

$$A \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B \quad \text{y} \quad A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B,$$

podemos escribir: $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$.

Ejercicio 12 (p. 384) Se tiene:

a) Si tenemos en cuenta la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión (cf. p. 384) y el ejercicio 8 (cf. p. 382), entonces:

$$(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap \complement_E B)\cup(A\cap B)=A\cap((\complement_E B)\cup B)=A\cap E=A.$$

b) Utilizamos el resultado del apartado anterior:

$$\begin{aligned} A\cup B &= \underbrace{[(A-B)\cup(A\cap B)]}_{A}\cup\underbrace{[(B-A)\cup(B\cap A)]}_{B}\\ &=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A). \end{aligned}$$

c) Utilizamos una de las propiedades distributivas y una de las leyes de DE MORGAN (cf. p. 384):

$$\begin{aligned} (\complement_E A)\cup(A\cap B) &= ((\complement_E A)\cup A)\cap((\complement_E A)\cup B)=E\cap((\complement_E A)\cup B)\\ &=(\complement_E A)\cup B=\complement_E(A\cap\complement_E B)=\complement_E(A-B). \end{aligned}$$

Ejercicio 13 (p. 384) Se tiene: $\mathrm{Card}(A)=18$ y $\mathrm{Card}(A\cup B\cup C)=54$, y los conjuntos pedidos son:

a) $\{5,14,19,23,28,32,37,41,50,55,73,82\}$,

b) $\{16,26,56,61,62,65,67,68,76,86\}$,

c) $\{16,26,46,56,61,62,64,65,67,68,69,76,86\}$.

Por otra parte, la expresión más simple con los conjuntos A, B y C que proporciona un conjunto con sólo un elemento es: $A\cap B\cap C$.

Problema de la p. 385 Si x es la cantidad de los que leen ambos periódicos B y C, entonces las cantidades de los que leen A y C (ambos), A y B (ambos), C, B, y A, son: $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, y $32x$, respectivamente.

Denotemos por $|A|$ la cantidad de los que leen el A, por $|B|$ la cantidad de los que leen el B, por $|A \text{ y } B|$ la cantidad de los que leen el A y el B (ambos), etc. De acuerdo con el corolario visto del teorema de los cuatro cardinales, se tiene:

$$|A \text{ o } B \text{ o } C|=|A|+|B|+|C|-|A \text{ y } B|-|A \text{ y } C|-|B \text{ y } C|+|A \text{ y } B \text{ y } C|,$$

y sustituyendo:

$$1470=32x+16x+8x-4x-2x-x+|A \text{ y } B \text{ y } C|=49x+|A \text{ y } B \text{ y } C|,$$

luego:

$$\frac{1}{49}\,|A \text{ y } B \text{ y } C|=30-x.$$

Se sabe que x es mayor o igual que 30, luego $30-x$ es menor o igual que 0; pero $(1/49)\,|A \text{ y } B \text{ y } C|$ es un número positivo o nulo, así que de la igualdad anterior se deduce que $x=30$, y en consecuencia: $|A \text{ y } B \text{ y } C|=0$.

Nadie lee, pues, todos y cada uno de los tres periódicos A, B y C.

Ejercicio 14 (p. 390) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $x \leqslant x$ y $y \leqslant y$, y podemos escribir: $(x,y) \leqslant (x,y)$. Es decir, la relación $\leqslant$ es reflexiva.

Por otro lado, si (x,y) y (z,t) son dos elementos de $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$(x,y) \leqslant (z,t) \quad \text{y} \quad (z,t) \leqslant (x,y),$$

entonces:

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant t \quad \text{y} \quad z \leqslant x, \quad t \leqslant y,$$

de lo que se deduce: $x = z$ y $y = t$, esto es: $(x,y) = (z,t)$. La relación $\leqslant$ es, pues, antisimétrica.

Finalmente, si (x,y), (z,t) y (u,v) son tres elementos de $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$(x,y) \leqslant (z,t) \quad \text{y} \quad (z,t) \leqslant (u,v),$$

entonces:

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant t \quad \text{y} \quad z \leqslant u, \quad t \leqslant v,$$

de lo que se infiere: $x \leqslant u$ y $y \leqslant v$, y $(x,y) \leqslant (u,v)$. La relación $\leqslant$ es, entonces, transitiva.

En resumen, la relación $\leqslant$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva: es una relación de orden en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 15 (p. 393) La restricción de f a $\mathbb{R}_+$ es la aplicación f_1 de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$ que verifica:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) = f(x).$$

Pero si $x \in \mathbb{R}_+$ (es decir, si $x \geqslant 0$), entonces: $f(x) = |x| = x$, así que f_1 es la aplicación de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$ que verifica: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) = x$. Es decir: $f_1 = I_{\mathbb{R}_+}$.

Ejercicio 16 (p. 396) No. Por ejemplo, si f es la aplicación de $A = \{1,2,3\}$ en $B = \{a,b\}$ definida por:

$$f(1) = a, \quad f(2) = a \quad \text{y} \quad f(3) = b,$$

entonces f verifica $(*)$ y, en cambio, no es inyectiva.

Realmente, cualquier aplicación verifica $(*)$. Si no se ve claro, obsérvese que $(*)$ es equivalente a: $\forall\,(x,y) \in A^2,\ (x = y) \Rightarrow (f(x) = f(y))$.

Ejercicio 17 (p. 401) La aplicación f es suprayectiva, pues si $y \in \mathbb{R}_+$, entonces y es la imagen de $\sqrt{y}$ por f: $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. También es inyectiva; en efecto, si x_1 y x_2 son dos elementos de $\mathbb{R}_+$, entonces:

$$(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1^2 = x_2^2) \implies (x_1 = x_2),$$

donde la última implicación puede escribirse al ser x_1 y x_2 positivos o nulos.

La aplicación f es entonces biyectiva. Para hallar su inversa: f^{-1}, nos fijamos en que si $y \in \mathbb{R}_+$ y $x \in \mathbb{R}_+$, entonces:

$$y = f(x) \iff y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

(recordemos que $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$); y como: $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, se concluye:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathbb{R}_+ \\ y & \dashrightarrow & \sqrt{y}. \end{array}$$

La aplicación g también es suprayectiva: si $y \in \mathbb{R}_+$, entonces y es la imagen por g de $y/2$. Y también inyectiva:

$$(g(x_1) = g(x_2)) \implies (2x_1 = 2x_2) \implies (x_1 = x_2).$$

Es, pues, biyectiva, y como se verifica:

$$y = g(x) \iff y = 2x \iff x = \frac{y}{2},$$

se concluye:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{g^{-1}} & \mathbb{R}_+ \\ y & \dashrightarrow & y/2. \end{array}$$

La aplicación compuesta $g \circ f$ es de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$; la imagen de $x \in \mathbb{R}_+$ por $g \circ f$ es:

$$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2.$$

Sabemos que $g \circ f$ es biyectiva (al serlo f y g); se verifica:

$$y = [g \circ f](x) \iff y = 2x^2 \iff x = \sqrt{\frac{y}{2}}$$

(pues: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), así que:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_+,\ (g \circ f)^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}.$$

Por otro lado, la imagen de un elemento y de $\mathbb{R}_+$ por la aplicación compuesta $f^{-1} \circ g^{-1}$ es:

$$[f^{-1} \circ g^{-1}](y) = f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{y}{2}}.$$

Es claro que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicio 18 (p. 404) Consideremos una operación $*$ definida sobre un conjunto, y supongamos admite dos elementos neutros e y e'. Entonces:

$$e * e' = e, \quad \text{ya que } e' \text{ es elemento neutro,}$$
$$e * e' = e', \quad \text{ya que } e \text{ es elemento neutro,}$$

y en consecuencia: $e = e'$.

Ejercicio 19 (p. 405) El elemento neutro de la operación $*$ es obviamente el número 0. Un número racional a admite un simétrico $\overline{a}$ precisamente si: $a * \overline{a} = \overline{a} * a = 0$, es decir:

$$a + \overline{a} + a\overline{a} = 0.$$

Ahora bien, si $a \neq -1$, la igualdad anterior es equivalente a:

$$\overline{a} = -\frac{a}{1+a},$$

y $-a/(1+a) \in \mathbb{Q}$; y si $a = -1$, dicha igualdad toma la forma: $-1 + \overline{a} - \overline{a} = 0$, igualdad que es un absurdo.

En conclusión, podemos afirmar que todo número racional a distinto de -1 es simetrizable, y de simétrico: $-a/(1+a)$, y que el número -1 no admite simétrico.

Finalmente, como no todos los números racionales admiten simétrico, la operación $*$ no es simetrizable sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 20 (p. 406) Sean a y b dos números racionales tales que $a * b = -1$. Si $b \neq -1$, entonces de:

$$a * b = a + b + ab = -1$$

se deduce:

$$a(1+b) + b = -1, \quad \text{y por tanto } a = \frac{-1-b}{1+b} = -1;$$

es decir, cuando $a * b = -1$, si $b \neq -1$, entonces $a = -1$; y análogamente: si $a \neq -1$, entonces $b = -1$. En definitiva, si $a * b = -1$, entonces necesariamente $a = -1$ o $b = -1$.

Lo demostrado en el párrafo anterior nos asegura que la restricción de la operación $*$ al conjunto $\mathbb{Q} - \{-1\}$ es una operación sobre $\mathbb{Q} - \{-1\}$:

$$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{Q} - \{-1\}) \times (\mathbb{Q} - \{-1\}),\ a * b \in \mathbb{Q} - \{-1\}.$$

Y esta operación verifica lo siguiente:

- es asociativa (cf. ejemplo 45, p. 403; allí se demostró para $*$ definida sobre $\mathbb{N}$, pero esta prueba es análoga);
- tiene elemento neutro: el número 0;
- cada elemento de $\mathbb{Q} - \{-1\}$ es simetrizable, y de simétrico (cf. solución del ejercicio 19, p. 425): $\overline{a} = -a/(1+a)$;
- es conmutativa; en efecto: si a y b son dos elementos de $\mathbb{Q} - \{-1\}$, entonces se verifica:

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a.$$

En conclusión: $(\mathbb{Q} - \{-1\}, *)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 21 (p. 407) Se verifica:

- La operación $+$ es asociativa:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)+[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)] &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2)\\ &= (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2),\end{aligned}$$

  y el mismo resultado se consigue a partir de: $[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]+(z_1,z_2)$.
- El par $(0,0)$ es el elemento neutro: $(x_1,x_2)+(0,0)=(0,0)+(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$.
- El par (x_1,x_2) es simetrizable y su simétrico (en este caso, podemos decir opuesto) es: $-(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2)$.

  En efecto: $(x_1,x_2)+(-x_1,-x_2)=(-x_1,-x_2)+(x_1,x_2)=(0,0)$.
- La operación $+$ es conmutativa. En efecto:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)=(y_1+x_1,y_2+x_2)=(y_1,y_2)+(x_1,x_2).$$

En conclusión: $(\mathbb{R}^2,+)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 22 (p. 411) Supongamos que $\triangleleft$ es una ley de composición externa definida sobre $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Q}\times\mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \triangleleft\ } & \mathbb{Z}\\ (q,z) & \dashrightarrow & q\triangleleft z,\end{array}$$

que verifica las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4).

Sea $z\in\mathbb{Z}$ tal que:

$$\frac{1}{2}\triangleleft 1 = z.$$

Entonces:

$$2\triangleleft\left(\frac{1}{2}\triangleleft 1\right) = 2\triangleleft z. \tag{14}$$

El primer miembro de (14) verifica:

$$2\triangleleft\left(\frac{1}{2}\triangleleft 1\right) \overset{\text{(L1)}}{=} \left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\triangleleft 1 = 1\triangleleft 1 \overset{\text{(L4)}}{=} 1;$$

y el segundo miembro: $2\triangleleft z = (1+1)\triangleleft z \overset{\text{(L2)}}{=} 1\triangleleft z + 1\triangleleft z \overset{\text{(L4)}}{=} z+z = 2z$. En consecuencia, de (14) se deduce: $1=2z$, o bien: $z=1/2$, en contra de que $z\in\mathbb{Z}$.

No es posible, pues, definir una ley de composición externa sobre $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ que verifique las propiedades (L1), (L2), (L3) y (L4).

Ejercicio 23 (p. 417) Pongamos: $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ y $Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$, con p y q (los grados respectivos de P y Q) menores o iguales que n. El producto PQ es:

$$(PQ)(x)=P(x)Q(x)=e_0+e_1x+\cdots+e_{2n-1}x^{2n-1}+e_{2n}x^{2n},$$

donde:

$$e_j=\sum_{k=0}^{j}a_kb_{j-k},\quad j=0,1,\ldots,2n.$$

En primer lugar, estudiemos el valor del coeficiente e_j si $j > p + q$. Para cualquier valor del índice del sumatorio ($0 \leqslant k \leqslant j$), de $j > p + q$ se deduce:

$$k > p \quad \text{o} \quad j - k > q;$$

en el caso: $k > p$, como el grado de P es p, se tiene:

$$a_k = 0, \quad \text{y por tanto } a_k b_{j-k} = 0;$$

en el caso: $j - k > q$, como el grado de Q es q, se tiene:

$$b_{j-k} = 0, \quad \text{y por tanto } a_k b_{j-k} = 0.$$

En definitiva, si $j > p + q$, todos los sumandos de e_j son nulos:

$$\text{si } j > p + q, \text{ entonces } e_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} = 0.$$

Por otro lado, estudiemos el valor del coeficiente e_{p+q}. Cada valor del índice k del sumatorio verifica una y sólo una de las condiciones siguientes:

a) $k < p$ y $p + q - k > q$,
b) $k = p$ y $p + q - k = q$,
c) $k > p$ y $p + q - k < q$.

En el caso (a), y recordando que Q es un polinomio de grado q, se tiene:

$$b_{p+q-k} = 0, \quad \text{y por tanto } a_k b_{p+q-k} = 0.$$

En el caso (b), se tiene: $a_k b_{p+q-k} = a_p b_q \neq 0$, pues a_p y b_q son no nulos por ser p y q los grados de P y Q, respectivamente. Por último, en el caso (c), por ser P de grado p, se tiene:

$$a_k = 0, \quad \text{y por tanto } a_k b_{p+q-k} = 0.$$

En definitiva:

$$e_{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = a_p b_q \neq 0.$$

Recapitulando:

$$e_j = 0 \quad \text{si } j > p + q, \quad \text{y} \quad e_{p+q} = a_p b_q \neq 0;$$

es decir: el grado de PQ es $p + q$.

Ejercicio 24 (p. 418) Queremos se verifique:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= A(x+1) - A(x) \\
&= (d-d) + c[(x+1)-x] + b\left[(x+1)^2 - x^2\right] + a\left[(x+1)^3 - x^3\right] \\
&= c + b(2x+1) + a(3x^2+3x+1) \\
&= (a+b+c) + (3a+2b)x + 3ax^2,
\end{aligned}
$$

y esto se consigue precisamente si:

$$3a = 1, \qquad 3a + 2b = 0, \qquad a + b + c = 0,$$

es decir: $a = 1/3$, $b = -1/2$ y $c = 1/6$. En consecuencia, el polinomio:

$$A(x) = d + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

verifica lo que queremos. Nótese que el valor de d es indiferente para conseguir que $A(x+1) - A(x) = x^2$; elegimos por comodidad $d = 0$:

$$A(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3. \tag{15}$$

Por otra parte, observamos se tiene:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= A(2) - A(1), \\
2^2 &= A(3) - A(2), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
n^2 &= A(n+1) - A(n).
\end{aligned}
$$

Sumando se obtiene:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = A(n+1) - A(1) = A(n+1),$$

y sustituyendo en (15) llegamos finalmente a:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= A(n+1) \\
&= \frac{n+1}{6} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

Apéndice B

DETERMINANTES

ESQUEMA - RESUMEN

B.1 DETERMINANTES DE ORDEN DOS

Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente dependientes si y sólo si:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \tag{1}$$

En efecto. Si los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente dependientes, entonces al menos uno de ellos, pongamos el $\boldsymbol{y}$, es igual al producto de un número real por el otro:

$$\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R},$$

luego $y_1 = \lambda x_1$ y $y_2 = \lambda x_2$, y por tanto:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 \lambda x_2 - x_2 \lambda x_1 = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica (1). Si uno de los vectores $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{y}$ es nulo, entonces ambos vectores son linealmente dependientes. Por el contrario, si los dos vectores son no nulos, y por ejemplo $y_1 \neq 0$, haciendo $\lambda = x_1/y_1$ —y por tanto $x_1 = \lambda y_1$—, de (1) se deduce que $x_2 = \lambda y_2$, es decir:

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y},$$

y en consecuencia los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente dependientes.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son linealmente independientes si y sólo si:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Para los vectores $\boldsymbol{x} = (2, 0)$ y $\boldsymbol{y} = (-1, 3)$ de $\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0 \quad \text{y} \quad y_1 = -1,\ y_2 = 3,$$

luego:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 2 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 6,$$

y $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son vectores linealmente independientes.

Del número $x_1 y_2 - x_2 y_1$, que se denota de la forma:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

Determinante de dos vectores en la base canónica

diremos es el **determinante de los vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ en la base canónica**:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

EJEMPLO 2 Los vectores $\boldsymbol{u} = (1,3)$ y $\boldsymbol{v} = (2,\lambda)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes si y sólo si $\lambda = 6$. En efecto, el determinante de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en la base canónica es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 6,$$

que es nulo si y sólo si $\lambda = 6$.

Para el estudio de los determinantes se utiliza la aplicación Δ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

Función determinante en la base canónica (orden 2)

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$, de la cual diremos es la **función determinante en la base canónica**.

Nos interesa resaltar dos propiedades de esta aplicación:

- Δ es bilineal, es decir, es lineal en cada una de sus variables, dejando fija la otra:

$$\Delta(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = \alpha\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta\Delta(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}),$$
$$\Delta(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{y}') = \alpha\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'),$$

  cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{y}'$ de $\mathbb{R}^2$ y los escalares α y β.
- Δ es alternada, es decir, cambia de signo cuando se intercambian los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$: $\Delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^2$.

La comprobación de estas dos propiedades es inmediata.

B.2 DETERMINANTES DE ORDEN TRES

1. Permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ Se tiene:

Permutación de $\{1,2,3\}$

> Definición
>
> Una **permutación** del conjunto $\{1, 2, 3\}$ es una aplicación biyectiva del conjunto $\{1, 2, 3\}$ en sí mismo.

Denotaremos por P_3 el conjunto cuyos elementos son las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Los elementos de P_3, que son seis, serán denotados así:

- u: $u(1) = 1$, $u(2) = 2$, $u(3) = 3$;
- t_{12}: $t_{12}(1) = 2$, $t_{12}(2) = 1$, $t_{12}(3) = 3$;
- t_{13}: $t_{13}(1) = 3$, $t_{13}(2) = 2$, $t_{13}(3) = 1$;

- t_{23}: $t_{23}(1) = 1$, $t_{23}(2) = 3$, $t_{23}(3) = 2$;
- p: $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 1$;
- q: $q(1) = 3$, $q(2) = 1$, $q(3) = 2$.

Transposición (orden 3)

La permutación u se denomina permutación **idéntica**; y las permutaciones t_{12}, t_{13} y t_{23}, **transposiciones**.

La composición de aplicaciones —que se denota: $\circ$— articula el conjunto P_3 como un grupo (no abeliano), cuyo elemento neutro es la permutación idéntica: u. La tabla de la composición de las aplicaciones de P_3 es la tabla 1. Por ejemplo, en ella leemos que $t_{23} \circ t_{12} = q$, pues:

$$[t_{23} \circ t_{12}](1) = t_{23}(t_{12}(1)) = t_{23}(2) = 3 = q(1),$$
$$[t_{23} \circ t_{12}](2) = t_{23}(t_{12}(2)) = t_{23}(1) = 1 = q(2),$$
$$[t_{23} \circ t_{12}](3) = t_{23}(t_{12}(3)) = t_{23}(3) = 2 = q(3).$$

$\circ$	u	t_{12}	t_{13}	t_{23}	p	q
u	u	t_{12}	t_{13}	t_{23}	p	q
t_{12}	t_{12}	u	p	q	t_{13}	t_{23}
t_{13}	t_{13}	q	u	p	t_{23}	t_{12}
t_{23}	t_{23}	p	q	u	t_{12}	t_{13}
p	p	t_{23}	t_{12}	t_{13}	q	u
q	q	t_{13}	t_{23}	t_{12}	u	p

TABLA 1. Tabla de la composición de las permutaciones de $\{1,2,3\}$. Si g y h son dos de estas permutaciones, entonces $g \circ h$ se encuentra en la fila donde está h y en la columna donde está g; por ejemplo: $t_{23} \circ t_{12} = q$, y $t_{23} \circ q \circ t_{12} = t_{23} \circ (q \circ t_{12}) = t_{23} \circ t_{23} = u$.

2. Formas trilineales alternadas Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 3. Una **forma trilineal alternada** sobre E es una aplicación f de $E \times E \times E$ en $\mathbb{R}$ que verifica:

- f es trilineal, es decir, f es lineal en cada una de sus variables, manteniendo fijas las otras dos:

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) + \beta f(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3),$$

  cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}'_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ de E, y los escalares α y β de $\mathbb{R}$, y análogamente con las variables segunda y tercera;
- f es alternada, esto es, f cambia de signo cuando se intercambian dos cualesquiera de los tres vectores (dejando en su lugar el restante).

EJEMPLO 3 Si f es alternada, se verifica:

$$f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) = -f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3), \tag{2}$$

pues hemos intercambiado los vectores $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_1$ (y el vector $\boldsymbol{x}_2$ ha permanecido en su lugar); y se verifica:

$$f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = -f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3), \tag{3}$$

pues hemos intercambiado los vectores $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_1$ (el vector $\boldsymbol{x}_3$ permanece en su lugar). De (2) y (3) se deduce:

$$f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3). \tag{4}$$

Análogamente:

$$f(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = -f(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3). \tag{5}$$

Por ser f alternada se verifica:

- $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2) = -f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (intercambiado los vectores $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_2$);
- $f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = -f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (cf. (3));
- $f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (cf. (4));
- $f(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (cf. (5));
- $f(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = -f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (intercambiando $\boldsymbol{x}_3$ y $\boldsymbol{x}_1$).

Dada una permutación g del conjunto $\{1, 2, 3\}$, si definimos $\varepsilon(g) = -1$ cuando g es una transposición, y $\varepsilon(g) = 1$ en otro caso:

$$\varepsilon(t_{12}) = \varepsilon(t_{13}) = \varepsilon(t_{23}) = -1 \quad \text{y} \quad \varepsilon(u) = \varepsilon(p) = \varepsilon(q) = 1,$$

cuando f es alternada se tiene:

$$f(\boldsymbol{x}_{g(1)}, \boldsymbol{x}_{g(2)}, \boldsymbol{x}_{g(3)}) = \varepsilon(g) f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3). \tag{6}$$

3. Determinante de tres vectores en una base Consideremos un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 3, y fijemos en E una base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Si f es una forma trilineal alternada sobre E, y $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ son vectores de E, con:

$$\boldsymbol{x}_i = x_{i1}\boldsymbol{v}_1 + x_{i2}\boldsymbol{v}_2 + x_{i3}\boldsymbol{v}_3, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant 3,$$

de ser f trilineal se deduce:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) &= f\left(\sum_{i=1}^{3} x_{1i}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{3} x_{2j}\boldsymbol{v}_j, \sum_{k=1}^{3} x_{3k}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^{3} x_{1i} f\left(\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{3} x_{2j}\boldsymbol{v}_j, \sum_{k=1}^{3} x_{3k}\boldsymbol{v}_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{1i}x_{2j} f\left(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \sum_{k=1}^{3} x_{3k}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{1i}x_{2j}x_{3k} f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k), \end{aligned}$$

es decir:

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} x_{1i} x_{2j} x_{3k} f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k). \tag{7}$$

Si dos cualesquiera de los índices i, j y k son iguales, entonces: $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k) = 0$. En efecto: si por ejemplo $i = j$, como f es alternada:

$$f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k) = -f(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k),$$

y por tanto $2f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) = 0$, es decir: $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) = 0$; y análogamente se demostrarían los otros casos. En consecuencia, en (7) sólo tenemos que considerar aquellos sumandos donde los índices i, j, k son distintos dos a dos; y en este caso, si definimos: $g(1) = i$, $g(2) = j$ y $g(3) = k$, entonces $g \in P_3$, y por tanto:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} x_{1i} x_{2j} x_{3k} f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k) = \sum_{g \in P_3} x_{1g(1)} x_{2g(2)} x_{3g(3)} f(\boldsymbol{v}_{g(1)}, \boldsymbol{v}_{g(2)}, \boldsymbol{v}_{g(3)}),$$

y de (6) y (7) se concluye:

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \sum_{g \in P_3} \varepsilon(g) x_{1g(1)} x_{2g(2)} x_{3g(3)}. \tag{8}$$

Función determinante en una base (orden 3)

Se define la **función determinante** en la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ como la aplicación D de E^3 en $\mathbb{R}$ tal que si $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in E^3$ y

$$\boldsymbol{x}_i = x_{i1}\boldsymbol{v}_1 + x_{i2}\boldsymbol{v}_2 + x_{i3}\boldsymbol{v}_3, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant 3,$$

entonces:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \sum_{g \in P_3} \varepsilon(g) x_{1g(1)} x_{2g(2)} x_{3g(3)}.$$

Determinante de tres vectores en una base

Del número $\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ diremos es el **determinante** de los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ en la base B, y se denota:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = \sum_{g \in P_3} \varepsilon(g) x_{1g(1)} x_{2g(2)} x_{3g(3)}. \tag{9}$$

En consecuencia, si f es una forma trilineal alternada sobre E, y D es la función determinante en la base fijada $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ de E, se verifica (cf. (8)):

$$f = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\,\mathrm{D}.$$

Al estudiar el caso general (cf. sección 4, p. 441), demostraremos que una condición necesaria y suficiente para que los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_3$ sean linealmente independientes es que su determinante (en cualquier base) sea no nulo.

4. Cálculo de un determinante de orden tres: regla de SARRUS Si desarrollamos la suma de (9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= x_{11}x_{22}x_{33} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} \\ &\quad - x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}. \end{aligned} \tag{10}$$

Regla de Sarrus (sólo orden 3)

Un método para calcular la expresión (10) (que no se generaliza para determinantes de más de tres vectores), denominado **regla de SARRUS**, es el siguiente: colocamos "encima del determinante" su tercera fila, y "debajo" su primera fila:

$$\begin{array}{ccc} x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix},$$
$$\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{array}$$

y escribimos y sumamos todos los productos posibles de tres términos en diagonal, anteponiendo el signo + a los orientados de la forma: $\searrow$, y el signo − a los orientados de la forma: $\nearrow$. Es decir, se antepone el signo + a los productos:

$$x_{13}x_{21}x_{32}, \quad x_{11}x_{22}x_{33} \quad \text{y} \quad x_{12}x_{23}x_{31},$$

y se antepone el signo − a los productos:

$$x_{12}x_{21}x_{33}, \quad x_{13}x_{22}x_{31} \quad \text{y} \quad x_{11}x_{23}x_{32}.$$

EJEMPLO 4 Fijemos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, donde: $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,1)$, y calculemos el determinante en la base B de los vectores: $\boldsymbol{x}_1 = (0,3,1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (-1,1,0)$, y $\boldsymbol{x}_3 = (2,-1,3)$.

Como:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_3,$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) \\ &\quad - 2\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\cdot 0 = 4, \end{aligned}$$

sin más que aplicar la regla de SARRUS:

$$\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 3 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array}$$

B.3 PERMUTACIONES

Sea n un número natural mayor o igual que 1.

Permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$

> Definición
>
> Una **permutación** del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es una aplicación biyectiva de este conjunto en sí mismo.

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ será denotado por P_n. La composición de aplicaciones articula el conjunto P_n como grupo. Su elemento neutro, que denotaremos por u_n, es la permutación que verifica:

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u_n(i) = i;$$

de u_n diremos es la permutación **idéntica** de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $g \in P_n$ denotaremos su permutación inversa por g^{-1}:

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = u_n.$$

EJEMPLO 5 Las aplicaciones r y s de $\{1, 2, 3, 4\}$ en sí mismo tales que:

$$r(1) = 1,\ r(2) = 4,\ r(3) = 2,\ r(4) = 3,$$

$$s(1) = 1,\ s(2) = 3,\ s(3) = 4,\ s(4) = 2,$$

son elementos de P_4, y verifican: $r \circ s = s \circ r = u_4$, es decir, s es la permutación inversa de la permutación r: $s = r^{-1}$, y r es la inversa de s: $r = s^{-1}$.

Transposición (orden n)

> Definición
>
> Si $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, de la permutación t_{ij} de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que verifica:
>
> $$t_{ij}(i) = j, \quad t_{ij}(j) = i \quad \text{y} \quad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i, j\},\ t_{ij}(k) = k$$
>
> diremos es una **transposición** de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Consecuencias de la definición de transposición Se verifica:

- *Las transposiciones t_{ij} y t_{ji} son la misma.*
- *La permutación idéntica u_n no es una transposición.*
- *Cualquiera que sea la transposición t_{ij} de $\{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene: $u_n = t_{ij} \circ t_{ij}$, y por tanto: $t_{ij}^{-1} = t_{ij}$.*

EJEMPLO 6 La transposición t_{23} de $\{1,2,3,4\}$ es la permutación del conjunto $\{1,2,3,4\}$ que verifica:

$$t_{23}(1) = 1,\ t_{23}(2) = 3,\ t_{23}(3) = 2,\ t_{23}(4) = 4.$$

Obsérvese que $t_{23} \circ t_{23} = u_4$.

EJERCICIO 1 *Probar que toda permutación elemento de P_n, con $n \geqslant 2$, es igual a una composición de transposiciones.* ▲

EJEMPLO 7 Con el método descrito en la solución del ejercicio 1, para la permutación r del ejemplo 5 (cf. p. 437) se obtendría: $r = t_{24} \circ t_{34}$. Obsérvese que también se verifica: $r = t_{34} \circ t_{23}$.

Aplicación alternada

Definición

Dado un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$, de una aplicación ϕ de E^n en $\mathbb{R}$ diremos es **alternada** si para toda transposición t de $\{1, 2, \dots, n\}$ se verifica:

$$\phi(\boldsymbol{x}_{t(1)}, \boldsymbol{x}_{t(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{t(n)}) = -\phi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n),$$

cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ de E.

EJEMPLO 8 Sea $E = \mathbb{R}$. La aplicación ϕ_3 de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ dada por $\phi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ es una aplicación alternada.

En efecto. Dados x_1, x_2 y x_3 de $\mathbb{R}$, para la transposición t_{12} de $\{1,2,3\}$ se verifica:

$$\begin{aligned}\phi_3(x_{t_{12}(1)}, x_{t_{12}(2)}, x_{t_{12}(3)}) &= \phi_3(x_2, x_1, x_3)\\ &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)\\ &= -(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)\\ &= -\phi_3(x_1, x_2, x_3);\end{aligned}$$

para la transposición t_{13}:

$$\begin{aligned}\phi_3(x_{t_{13}(1)}, x_{t_{13}(2)}, x_{t_{13}(3)}) &= \phi_3(x_3, x_2, x_1)\\ &= (x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) = -\phi_3(x_1, x_2, x_3);\end{aligned}$$

y, finalmente, para la transposición t_{23}:

$$\begin{aligned}\phi_3(x_{t_{23}(1)}, x_{t_{23}(2)}, x_{t_{23}(3)}) &= \phi_3(x_1, x_3, x_2)\\ &= (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = -\phi_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

En consecuencia, ϕ_3 es una aplicación alternada.

Análogamente se demostraría que la aplicación ϕ_n de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, con $n \geqslant 2$, dada por:

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

es una aplicación alternada.

Proposición II.1 *Sean g, h y t tres permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que:*

$$g = h \circ t \quad \text{y} \quad t \text{ es una transposición,}$$

y consideremos un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$, y una aplicación alternada ϕ de E^n en $\mathbb{R}$. Entonces:

$$\phi(\boldsymbol{x}_{g(1)}, \boldsymbol{x}_{g(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{g(n)}) = -\phi(\boldsymbol{x}_{h(1)}, \boldsymbol{x}_{h(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{h(n)}),$$

cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ de E.

Demostración Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si definimos: $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_{h(i)}$, entonces:

$$\boldsymbol{y}_{t(i)} = \boldsymbol{x}_{h(t(i))} = \boldsymbol{x}_{g(i)},$$

y como ϕ es alternada, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}_{g(1)}, \boldsymbol{x}_{g(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{g(n)}) = \phi(\boldsymbol{y}_{t(1)}, \boldsymbol{y}_{t(2)}, \dots, \boldsymbol{y}_{t(n)}) &= -\phi(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n) \\ &= -\phi(\boldsymbol{x}_{h(1)}, \boldsymbol{x}_{h(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{h(n)}). \end{aligned}$$

c.q.d.

Corolario *Si $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ son n vectores de E, con $n \geqslant 2$, el número:*

$$\phi(\boldsymbol{x}_{g(1)}, \boldsymbol{x}_{g(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_{g(n)})$$

es igual a $\phi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ o a $-\phi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, según sea la permutación $g \in \boldsymbol{P}_n$ igual a una composición de una cantidad par o impar, respectivamente, de transposiciones.

Sea $n \geqslant 2$. Si una permutación es igual a una composición de una cantidad par de transposiciones, entonces no es igual a una composición de una cantidad impar; y viceversa. En efecto. Sea ϕ_n la aplicación alternada de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ del ejemplo 8 (cf. p. 438), y sean x_1, x_2, ..., x_n números reales distintos dos a dos, y por tanto:

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0. \tag{11}$$

Si la permutación $g \in \boldsymbol{P}_n$ fuera igual a la composición de una cantidad par de transposiciones, y también igual a la composición de una cantidad impar, entonces se verificarían simultáneamente (cf. corolario de la proposición II.1):

$$\begin{cases} \phi_n(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \ldots, x_{g(n)}) = \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \text{y} \\ \phi_n(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \ldots, x_{g(n)}) = -\phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

de donde se deduciría que $\phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y por tanto que $\phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es igual a 0, en contradicción con (11).

Signatura de una permutación

Definición

Dada una permutación $g \in P_n$, con $n \geqslant 2$, la **signatura** de g, que se denota por $\varepsilon(g)$, se define como igual a 1 si g es composición de una cantidad par de transposiciones, y como igual a -1 si es composición de una cantidad impar.

La signatura de la permutación u_1 se define como igual a 1; esto es: $\varepsilon(u_1) = 1$.

Consecuencias de la definición de signatura Se verifica:

- *La signatura de la permutación idéntica u_n, con $n \geqslant 2$, es igual a 1:*

$$\varepsilon(u_n) = 1.$$

Basta tener en cuenta que $u_n = t_{ij} \circ t_{ij}$ para cualquier transposición t_{ij} de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

- *La signatura de una transposición es igual a -1:*

$$\varepsilon(t_{ij}) = -1.$$

- *Si g y h son dos elementos de P_n, entonces:*

$$\varepsilon(g \circ h) = \varepsilon(g)\,\varepsilon(h). \tag{12}$$

El caso $n = 1$ es obvio. Supongamos que $n \geqslant 2$. Si la permutación $g \circ h$ es igual a la composición de un número par de transposiciones, necesariamente g y h verifican: ambas son composición de un número par de transposiciones, o ambas son composición de un número impar. Es decir: si $\varepsilon(g \circ h) = 1$, entonces:

$$\varepsilon(g) = \varepsilon(h) = 1 \quad \text{o} \quad \varepsilon(g) = \varepsilon(h) = -1,$$

y en ambos casos se verifica (12).

Si, por el contrario, $g \circ h$ es igual a la composición de un número impar de transposiciones, necesariamente una de las permutaciones: o bien g, o bien h, es igual a la composición de un número par y la otra igual a la composición de un número impar. Esto es: si $\varepsilon(g \circ h) = -1$, entonces:

$$\{\varepsilon(g), \varepsilon(h)\} = \{1, -1\},$$

y en consecuencia se verifica (12).

- *La signatura de una permutación coincide con la de su permutación inversa. Es decir, para toda permutación g se verifica:*

$$\varepsilon(g^{-1}) = \varepsilon(g).$$

Si $g \in P_n$, entonces $g \circ g^{-1} = u_n$, y por tanto: $\varepsilon(g \circ g^{-1}) = \varepsilon(u_n)$, luego:

$$\varepsilon(g)\,\varepsilon(g^{-1}) = 1; \tag{13}$$

ahora bien, si ocurriera que $\varepsilon(g^{-1}) \neq \varepsilon(g)$ (es decir, una toma el valor -1 y la otra el valor 1), entonces se tendría que $\varepsilon(g)\,\varepsilon(g^{-1}) = -1$, en contradicción con (13).

Nota Para $n = 3$ la signatura de una permutación $g \in P_3$ coincide con el número $\varepsilon(g)$ tal cual se definió éste en la sección 2 (cf. p. 434). ▲

EJEMPLO 9 La signatura de la permutación r del ejemplo 5 (cf. p. 437) es igual a 1, pues r es composición de un número par de transposiciones (cf. ejemplo 7, p. 438).

La permutación s del ejemplo 5 (cf. p. 437) es igual a la composición de un número par de transposiciones, pues $s = r^{-1}$, y por tanto: $\varepsilon(s) = \varepsilon(r) = 1$.

EJERCICIO 2 *Sean $g \in P_n$ y $g' \in P_{n-1}$, con $n \geqslant 2$, dos permutaciones tales que:*

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ g'(i) = g(i)$$

(y por tanto: $g(n) = n$). Demostrar que $\varepsilon(g) = \varepsilon(g')$. ▲

B.4 DETERMINANTE DE n VECTORES EN UNA BASE

En toda la sección consideramos un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n no nula, y fijamos en E una base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

Definición

Función determinante en una base (orden n)

La **función determinante** en la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ es la aplicación D de E^n en $\mathbb{R}$ tal que si $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in E^n$ y

$$\boldsymbol{x}_i = x_{i1}\boldsymbol{v}_1 + x_{i2}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_{in}\boldsymbol{v}_n, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

entonces:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g) x_{1g(1)} x_{2g(2)} \cdots x_{ng(n)}. \tag{14}$$

Determinante de n vectores en una base

Del número real $\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ diremos es el **determinante** de los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ **en la base** $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

Nota bene Si $E = \mathbb{R}^2$ y fijamos como base B la canónica de $\mathbb{R}^2$, la función determinante D en la base B coincide con la función Δ, tal y como se definió esta última función en la sección 1 (cf. p. 431). ▲

Formal n-lineal alternada

Definición

De una aplicación f de E^n en $\mathbb{R}$ diremos es una **forma n-lineal alternada** sobre E si verifica:

- f es n-lineal, es decir, f es lineal en cada una de sus variables, manteniendo fijas las restantes;
- f es una aplicación alternada de E^n en $\mathbb{R}$ (cf. p. 438).

Propiedades Se verifica:

- *La aplicación* D *es alternada. Es decir, si $t \in P_n$ es una transposición, entonces:*

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_{t(1)}, \boldsymbol{x}_{t(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t(n)}) = -\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n). \tag{15}$$

Se verifica:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_{t(1)}, \boldsymbol{x}_{t(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t(n)}) = \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g) x_{t(1)g(1)} x_{t(2)g(2)} \cdots x_{t(n)g(n)}, \tag{16}$$

pues si hacemos: $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_{t(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces:

$$\boldsymbol{y}_i = x_{t(i)1}\boldsymbol{v}_1 + x_{t(i)2}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_{t(i)n}\boldsymbol{v}_n, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_{t(1)}, \boldsymbol{x}_{t(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t(n)}) &= \mathrm{D}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \\ &= \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g) x_{t(1)g(1)} x_{t(2)g(2)} \cdots x_{t(n)g(n)}.\end{aligned}$$

El producto $x_{t(1)g(1)} x_{t(2)g(2)} \cdots x_{t(n)g(n)}$ aparece en la suma de (16) multiplicado por $\varepsilon(g)$, pero aparece en la suma de (14) multiplicado por la signatura de la permutación $g \circ t$, pues si $h = g \circ t$ —y por tanto: $g = h \circ t$—, entonces los productos:

$$x_{t(1)g(1)} x_{t(2)g(2)} \cdots x_{t(n)g(n)} \quad \text{y} \quad x_{1h(1)} x_{2h(2)} \cdots x_{nh(n)}$$

tienen los mismos factores. Así, y dado que al recorrer g el conjunto P_n, también lo recorre $h = g \circ t$ (al ser t una permutación), y como: $\varepsilon(g \circ t) = \varepsilon(g)\varepsilon(t) = -\varepsilon(g)$ (cf. consecuencias de la definición de signatura, p. 440), se tiene:

$$\sum_{g \in P_n} \varepsilon(g) x_{t(1)g(1)} x_{t(2)g(2)} \cdots x_{t(n)g(n)} = -\sum_{h \in P_n} \varepsilon(h) x_{1h(1)} x_{2h(2)} \cdots x_{nh(n)},$$

de lo que se concluye (15).

- *La función determinante* D *es una forma n-lineal alternada sobre E.*

La aplicación D es lineal en la variable $\boldsymbol{x}_1$ manteniendo fijas las restantes:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}'_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n) &= \sum_{g\in P_n}\varepsilon(g)(\alpha x_{1g(1)}+\beta x'_{1g(1)})x_{2g(2)}\cdots x_{ng(n)}\\ &= \alpha\sum_{g\in P_n}\varepsilon(g)x_{1g(1)}x_{2g(2)}\cdots x_{ng(n)}\\ &\quad+\beta\sum_{g\in P_n}\varepsilon(g)x'_{1g(1)}x_{2g(2)}\cdots x_{ng(n)}\\ &= \alpha\,\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)+\beta\,\mathrm{D}(\boldsymbol{x}'_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n);\end{aligned}$$

y análogamente D es lineal en cualquier otra variable dejando fijas las restantes, lo que prueba que es n-lineal, y en conclusión (primera propiedad) D es una forma n-lineal alternada sobre E.

- *El determinante de los propios vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ en la base $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ es igual a 1:*

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)=1.$$

Si para cada $1\leqslant i\leqslant n$ escribimos: $\boldsymbol{v}_i=v_{i1}\boldsymbol{v}_1+v_{i2}\boldsymbol{v}_2+\cdots+v_{in}\boldsymbol{v}_n$, entonces:

$$v_{ij}=\begin{cases}1, & \text{si } i=j,\\ 0, & \text{si } i\neq j,\end{cases}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n) &= \sum_{g\in P_n}\varepsilon(g)v_{1g(1)}v_{2g(2)}\cdots v_{ng(n)}\\ &= \varepsilon(u_n)v_{1u_n(1)}v_{2u_n(2)}\cdots v_{nu_n(n)}=v_{11}v_{22}\cdots v_{nn}=1,\end{aligned}$$

pues en los restantes sumandos algún factor es de la forma: v_{jk} con $j\neq k$, que es nulo.

- *Si dos cualesquiera de los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ son iguales, entonces:*

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)=0.$$

Si $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_j$, con $i\neq j$, y t es la transposición $t_{ij}\in P_n$, entonces:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_{t(1)},\boldsymbol{x}_{t(2)},\dots,\boldsymbol{x}_{t(n)})=\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n);$$

pero por ser D alternada: $\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_{t(1)},\boldsymbol{x}_{t(2)},\dots,\boldsymbol{x}_{t(n)})=-\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)$, y en consecuencia: $\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)=0$.

- *No se modifica el valor del determinante de los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ en una base si a uno de ellos se le suma una combinación lineal de los restantes.*

Si, por ejemplo, sumamos a $\boldsymbol{x}_1$ el vector $\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$, como D es n-lineal, se tiene:

$$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{x}_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\right)=\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n)+\mathrm{D}\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n\right),$$

pero (propiedad anterior):

$$\mathrm{D}\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\right) = \sum_{i=2}^{n}\alpha_i\, \mathrm{D}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_i, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0,$$

y por tanto:

$$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\right) = \mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Teorema 1 *Sea $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ una base fijada en E, y sea* D *la función determinante en la base B. Dado un número real a, la aplicación:*

$$f = a\,\mathrm{D}$$

es la única forma n-lineal alternada sobre E tal que:

$$f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = a.$$

Demostración En primer lugar, como D es una forma n-lineal alternada sobre E (cf. propiedades de D), lo mismo acontece con $f = a\,\mathrm{D}$.

Por otro lado, si ψ es una forma n-lineal alternada sobre E tal que $\psi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = a$, entonces $\psi = f$. En efecto, generalizando el desarrollo llevado a cabo para $n = 3$ (cf. p. 434), llegaríamos a:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) &= \psi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\,\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\\ &= a\,\mathrm{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n),\end{aligned}$$

para cualesquiera $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de E, y por tanto: $\psi = f$. c.q.d.

Corolario *Fijada la base $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de E, la función determinante en la base B:* D, *es la única forma n-lineal alternada sobre E que toma el valor* 1 *en $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.*

Teorema 2 *Una condición necesaria y suficiente para que los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ de E sean linealmente independientes es que su determinante —en cualquier base de E— sea distinto de* 0.

Demostración Sea $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ una base de E, y sea D la función determinante en la base B.

La condición es necesaria. Si los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ son linealmente independientes, entonces $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ es una base de E, y del teorema 1 (cf. p. 444) deducimos:

- si $b \neq 0$, fijando la base $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, existe una única forma n-lineal alternada f sobre E tal que: $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = b$;
- fijando la base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, entonces: $f = a\,\mathrm{D}$, con $a = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

Por tanto: $a\,\mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = b \neq 0$, y necesariamente:

$$\mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \neq 0.$$

La condición es suficiente. Supongamos que los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ son linealmente dependientes. Si $n = 1$, entonces $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$, y por tanto $\mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1) = 0$. Si $n \geqslant 2$, al menos uno de los vectores es combinación lineal de los restantes; por ejemplo, supongamos se tiene: $\boldsymbol{x}_1 = \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n$; se cumple (cf. propiedades de D):

$$\mathsf{D}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\right) = \sum_{i=2}^{n}\alpha_i\,\mathsf{D}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0.$$

B.5 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz real cuadrada de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el j-ésimo ($1 \leqslant j \leqslant n$) vector columna de A: $\boldsymbol{a}_j$, es el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son los términos de la j-ésima columna de A:

$$\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}),$$

o bien, si $B_C = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n. \tag{17}$$

Sea $E = \mathbb{R}^n$, y denotemos por Δ la función determinante, definida sobre E^n, en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Determinante de una matriz

> Definición
>
> Se define el **determinante de la matriz** A, que se denota: $\det(A)$, como:
>
> $$\det(A) = \Delta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$
>
> Es decir (teniendo en cuenta (17)):
>
> $$\det(A) = \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g)\, a_{g(1)1}a_{g(2)2}\cdots a_{g(n)n}.$$

Notación El determinante de la matriz A se escribe de la forma:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

▲

El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales

Proposición II.2 *El determinante de la matriz traspuesta de A es igual al determinante de A:*

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Demostración Por definición:

$$\det(A) = \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g)\, a_{g(1)1} a_{g(2)2} \cdots a_{g(n)n},$$

$$\det(A^t) = \sum_{h \in P_n} \varepsilon(h)\, a_{1h(1)} a_{2h(2)} \cdots a_{nh(n)},$$

y como los productos:

$$a_{g(1)1} a_{g(2)2} \cdots a_{g(n)n} \quad \text{y} \quad a_{g(g^{-1}(1))g^{-1}(1)} a_{g(g^{-1}(2))g^{-1}(2)} \cdots a_{g(g^{-1}(n))g^{-1}(n)}$$

son iguales (pues tienen los mismos factores), se tiene:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g)\, a_{g(g^{-1}(1))g^{-1}(1)} a_{g(g^{-1}(2))g^{-1}(2)} \cdots a_{g(g^{-1}(n))g^{-1}(n)} \\ &= \sum_{g \in P_n} \varepsilon(g^{-1})\, a_{1g^{-1}(1)} a_{2g^{-1}(2)} \cdots a_{ng^{-1}(n)}, \end{aligned} \tag{18}$$

pues $\varepsilon(g^{-1}) = \varepsilon(g)$ (cf. consecuencias de la definición de signatura, p. 440). Ahora bien, al recorrer g el conjunto P_n, también g^{-1} lo recorre, luego de (18) se deduce que $\det(A)$ es igual a:

$$\sum_{g^{-1} \in P_n} \varepsilon(g^{-1})\, a_{1g^{-1}(1)} a_{2g^{-1}(2)} \cdots a_{ng^{-1}(n)},$$

que es precisamente el determinante de A^t. En conclusión: $\det(A) = \det(A^t)$. C.Q.D.

Propiedades del determinante de una matriz Teniendo en cuenta la definición de determinante de una matriz, las propiedades del determinante de n vectores en una base (cf. p. 442) y la proposición II.2 (cf. p. 446), se verifica:

- *El determinante de la matriz identidad I_n es igual a 1:* $\det(I_n) = 1$.
  Pues $\det(I_n) = \Delta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = 1$.
- *El valor del determinante de una matriz cambia de signo si se intercambian entre sí dos columnas (o dos filas) de la matriz.*

- *El valor del determinante de una matriz no varía si a una columna (o a una fila) de la matriz se le suma una combinación lineal de las restantes columnas (o filas).*
- *Si todos los términos de una columna (o de una fila) de una matriz se multiplican por un mismo número, entonces el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.*
- *El determinante de una matriz es nulo si y sólo si los vectores columna (o los vectores fila) de la matriz son linealmente dependientes. En particular, el determinante es nulo si una columna (o una fila) tiene todos sus términos nulos, o si dos columnas (o dos filas) son iguales.*

  Cf. teorema 2 (cf. p. 444).

El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes

Proposición II.3 *Si A y B son dos matrices reales cuadradas de orden n, entonces:*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demostración Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las aplicaciones lineales canónicamente asociadas a las matrices A y B, respectivamente. Es decir, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tales que:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{b}_j, \quad \text{con } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

donde $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son los vectores columna de A, y $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ son los vectores columna de B.

La aplicación f de E^n en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)),$$

para cada $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de $\mathbb{R}^n$, es una forma n-lineal alternada sobre $E = \mathbb{R}^n$. En efecto. La aplicación f es lineal en la variable $\boldsymbol{x}_1$, dejando fijas las restantes:

$$\begin{aligned} f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) &= \Delta\left(\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}'_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)\right) \\ &= \Delta(\alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \beta\mathcal{A}(\boldsymbol{x}'_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)) \\ &= \alpha\,\Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)) \\ &\qquad - \beta\,\Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}'_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)) \\ &= \alpha f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + \beta f(\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \end{aligned}$$

y análogamente se probaría que f es lineal en cualquiera de las otras variables, dejando fijas las restantes; por tanto, f es n-lineal. Por otro lado, f es alternada, pues si $t \in P_n$ es una transposición, se tiene:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_{t(1)}, \boldsymbol{x}_{t(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t(n)}) &= \Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_{t(1)}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_{t(2)}), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_{t(n)})) \\ &= -\Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)) = -f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n). \end{aligned}$$

En consecuencia (cf. teorema 1, p. 444), se verifica:

$$f = a\,\Delta, \quad \text{con } a = f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$

y en particular, tomando $\boldsymbol{x}_1 = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \boldsymbol{x}_n = \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)$:

$$f(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)) = f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\,\Delta(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)). \tag{19}$$

Ahora bien:

$$f(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)) = \Delta([\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_1), [\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_2), \ldots, [\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_n)) = \det(AB),$$

pues $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_1)$, $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_2), \ldots,$ $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}](\boldsymbol{e}_n)$ son los vectores columna de la matriz AB; y también:

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \Delta(\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)) = \Delta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(A),$$

y $\Delta(\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n)) = \Delta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(B)$. En conclusión, de la igualdad (19) se deduce: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. C.Q.D.

B.6 DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS TÉRMINOS DE UNA FILA O COLUMNA

Sea A una matriz real cuadrada de orden n, con $n \geqslant 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por A_{ij} la matriz cuadrada de orden $n-1$ que se obtiene cuando en la matriz A se suprimen la i-ésima fila y la j-ésima columna:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \ldots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \ldots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \ldots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \ldots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Menor complementario de un término

De la matriz A_{ij} diremos es el **menor complementario** en la matriz A del término a_{ij} (que ocupa la posición (i,j)). Del número real:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Adjunto de un término

diremos es el **adjunto**, o **cofactor**, en la matriz A del término a_{ij} (que ocupa la posición (i,j)).

Proposición II.4 *Si A es la matriz cuadrada de orden n ($n \geqslant 2$):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces se verifica: $\det(A) = a_{nn}\det(A_{nn}) = a_{nn}\alpha_{nn}$.

Demostración Se tiene:

$$\det(A) = \sum_{\substack{g\in P_n \\ g(n)=n}} \varepsilon(g)a_{g(1)1}a_{g(2)2}\cdots a_{g(n)n},$$

pues los sumandos que tienen un factor de la forma $a_{g(n)n}$ con $g(n) \neq n$ son nulos. Ahora bien, observemos que la aplicación que hace corresponder a la permutación $g \in P_n$, donde $g(n) = n$, la permutación $g' \in P_{n-1}$ tal que:

$$g'(i) = g(i), \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

es una biyección entre los conjuntos:

$$\{h \in P_n \mid h(n) = n\} \quad \text{y} \quad P_{n-1},$$

que además verifica (cf. ejercicio 2, p. 441): $\varepsilon(g) = \varepsilon(g')$. Por tanto:

$$\sum_{\substack{g\in P_n \\ g(n)=n}} \varepsilon(g)a_{g(1)1}a_{g(2)2}\cdots a_{g(n)n}$$

$$= a_{nn}\sum_{g'\in P_{n-1}} \varepsilon(g')a_{g'(1)1}a_{g'(2)2}\cdots a_{g'(n-1)(n-1)} = a_{nn}\det(A_{nn}),$$

y en conclusión: $\det(A) = a_{nn}\det(A_{nn}) = a_{nn}\alpha_{nn}$. □

Corolario *Si A es la matriz cuadrada de orden n ($n \geqslant 2$):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & 0 & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & 0 & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & 0 & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & 0 & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces se verifica:

$$\det(A) = (-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = a_{ij}\alpha_{ij}.$$

Demostración En la matriz A, permutamos las columnas j-ésima y $(j+1)$-ésima, y a continuación permutamos las columnas $(j-1)$-ésima y $(j+2)$-ésima de la matriz obtenida, y procedemos con permutaciones sucesivas de columnas consecutivas hasta que conseguimos una matriz cuya n-ésima columna es la j-ésima columna original de la matriz A. Si llamamos A_1 a esta nueva matriz, se verifica:

$$\det(A_1) = (-1)^{n-j}\det(A), \tag{20}$$

pues hemos llevado a cabo exactamente $n-j$ permutaciones de columnas y cada permutación cambia el signo del determinante (cf. propiedades del determinante de una matriz, p. 446). Además, obsérvese que el menor complementario en A_1 del término a_{ij} —que ahora ocupa la posición (i,n)— sigue siendo A_{ij}:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} & a_{ij} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix},$$

Procediendo con las filas de la matriz A_1 análogamente a como hemos hecho con las columnas de la matriz A, podemos obtener, después de $n-i$ permutaciones de filas consecutivas, la matriz:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} & 0 \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

para la cual se verifica (cf. (20)): $\det(A_2) = (-1)^{n-i}\det(A_1) = (-1)^{2n-i-j}\det(A)$, y por tanto:

$$(-1)^{i+j}\det(A_2) = (-1)^{2n}\det(A) = \det(A). \tag{21}$$

Ahora bien, el menor complementario en A_2 del término a_{ij} —ahora de posición (n,n)— también es A_{ij}, y en consecuencia (cf. proposición II.4, p. 449):

$$\det(A_2) = a_{ij}\det(A_{ij}). \tag{22}$$

De (21) y (22) se concluye: $\det(A) = (-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = a_{ij}\alpha_{ij}$. (c.q.d.)

Desarrollo de un determinante por los términos de la j-ésima columna

Corolario *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n ($n \geqslant 2$). Para cada j, con $1 \leqslant j \leqslant n$, se verifica:*

$$\det(A) = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}. \tag{23}$$

Demostracion De ser la función determinante n-lineal se deduce:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & 0 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & 0 & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & 0 & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & 0 & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

y con el primer corolario de la proposición II.4 se concluye (23).

De (23) se dice es el **desarrollo del determinante de la matriz A por los términos de la j-ésima columna.**

Desarrollo de un determinante por los términos de la i-ésima fila

Corolario *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n ($n \geqslant 2$). Para cada i, con $1 \leqslant i \leqslant n$, se verifica:*

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}. \tag{24}$$

Es una consecuencia inmediata de (23) y de la proposición II.2 (cf. p. 446).

De (24) se dice es el **desarrollo del determinante de la matriz A por los términos de la i-ésima fila.**

EJEMPLO 10 Sea A la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y calculemos $\det(A)$.

Si sumamos a la primera columna la segunda cambiada de signo más la tercera multiplicada por 2, entonces (cf. propiedades del determinante de una matriz, p. 446):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

y desarrollando este último determinante por los términos de la primera columna (cf. desarrollo (23), p. 451):

$$\det(A) = (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \det(A_{41}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

pues el término de posición $(4,1)$ es igual a -1 y los restantes de la primera columna son nulos; y, finalmente, desarrollando este determinante por los términos de la segunda fila (cf. desarrollo (24)), obtenemos (cf. sección 1, p. 431):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(0 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)) + 2(1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1)) = 11, \end{aligned}$$

y con (25) concluimos que $\det(A) = 11$.

B.7 APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Consideremos una matriz real A cuadrada de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz adjunta

Definición

Si $n \geqslant 2$, se define la **matriz adjunta** de A, que se denota: A^*, como la matriz, cuadrada de orden n, $A^* = \left(\alpha^*_{ij}\right)$, donde:

$$\alpha^*_{i,j} = \alpha_{ji}, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Es decir, A^* es la matriz tal que su término de posición (i,j) es el cofactor del término a_{ji} en la matriz A.

Obsérvese que de acuerdo con la definición de cofactor (cf. p. 448) se tiene:

$$\alpha^*_{ij} = (-1)^{j+i} \det(A_{ji}).$$

El determiniante de la matriz inversa es igual al inverso del determinante

Proposición II.5 *La matriz A es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$*; y, en este caso, se verifica:*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{26}$$

Demostración La matriz A es invertible si y sólo su rango es igual a n, es decir, si y sólo si sus n vectores columna son linealmente independientes, lo que es equivalente a $\det(A) \neq 0$ (cf. propiedades del determinante de una matriz, p. 446).

Por otro lado, en el caso de ser $\det(A) \neq 0$, como $AA^{-1} = I_n$, se tiene:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1; \tag{27}$$

y como (cf. proposición II.3, p. 447):

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}), \tag{28}$$

de (27) y (28) se deduce (26). C.Q.D.

Proposición II.6 *Si $n \geqslant 2$, el producto de la matriz A y la matriz adjunta de A: A^*, es igual al producto del número* $\det(A)$ *por la matriz identidad I_n:*

$$AA^* = \det(A)I_n = A^*A. \tag{29}$$

Demostración Sea $C = \left(c_{ij}\right)$ la matriz: $C = AA^*$. Entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{jk}. \tag{30}$$

Ahora bien, si $i = j$, entonces:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}),$$

y c_{ii} es el desarrollo del determinante de A por los términos de la i-ésima fila (cf. p. 451), y por tanto: $c_{ii} = \det(A)$.

Por otro lado, si $i \neq j$, y B es la matriz obtenida sustituyendo en la matriz A la j-ésima fila por la i-ésima:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

entonces (30) es el desarrollo del determinante de B por los términos de la j-ésima fila, y como $\det(B) = 0$, pues B tiene dos filas iguales (cf. propiedades del determinante de una matriz, p. 446), se deduce que $c_{ij} = 0$.

En conclusión, la matriz AA^* es tal que los términos de la diagonal principal son iguales a $\det(A)$, y los restantes son iguales a 0. Por tanto: $AA^* = \det(A)I_n$.

De manera similar (utilizando desarrollos por los términos de una columna) se demostraría que $A^*A = \det(A)I_n$, y en consecuencia se verifica (29). C.Q.D.

Fórmula para la inversa de una matriz

Corolario *Si la matriz A, cuadrada de orden $n \geqslant 2$, es invertible, entonces su matriz inversa: A^{-1}, verifica:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*. \tag{31}$$

Demostración Utilizando (29) se tiene:

$$A^* = A^*I_n = A^*AA^{-1} = \det(A)I_nA^{-1} = \det(A)A^{-1}, \tag{32}$$

y como $\det(A) \neq 0$ (cf. proposición II.5, p. 453), de (32) se concluye (31). C.Q.D.

EJEMPLO 11 Determinemos para qué valores de a es invertible la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y calculemos A^{-1} para esos valores.

Desarrollando por los términos de la primera columna, se tiene:

$$\det(A) = a\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4a - 4 = 4(a-1),$$

y por tanto (cf. proposición II.5, p. 453) A es invertible si y sólo si $a \neq 1$.

Ahora calculamos los cofactores de los términos de A:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

y análogamente: $\alpha_{21} = 4$, $\alpha_{22} = -2$ y $\alpha_{23} = 1 - 2a$, y por tanto:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 2a \\ -1 & 1\;\;2a & a \end{pmatrix}.$$

En conclusión (cf. corolario de la proposición II.6, p. 453), si $a \neq 1$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{4(a-1)}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 2a \\ -1 & 1-2a & a \end{pmatrix}.$$

B.8 APLICACIÓN AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Submatrriz de una matriz

Dada una matriz A de orden (n, m), al suprimir p filas de A, con $0 \leqslant p \leqslant n - 1$, y q columnas de A, con $0 \leqslant q \leqslant m - 1$, obtenemos una nueva matriz B, que es de orden $(n - p, m - q)$. De la matriz B diremos es una **submatriz** de la matriz A.

Cálculo del rango de una matriz

Proposición II.7 *Sea A una matriz de orden (n, m) que verifica:*

a) A admite alguna submatriz cuadrada de orden r $(1 \leqslant r \leqslant \min\{n, m\})$ cuyo determinante es no nulo,

b) toda submatriz cuadrada de A de orden $r + 1$, si existe, tiene determinante nulo.

Entonces: rango $A = r$.

Demostración Sea $A = \left(a_{ij}\right)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{33}$$

Sea f la aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^r \\ (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n) & \dashrightarrow & (x_1, x_2, \dots, x_r). \end{array}$$

Si $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_r$ son los r primeros vectores columna de la matriz A (vectores de $\mathbb{R}^n$), la imagen por f de $\boldsymbol{a}_j$ es:

$$f(\boldsymbol{a}_j) = f(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj}, \dots, a_{nj}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj}), \quad \text{con } 1 \leqslant j \leqslant r;$$

ahora bien, el determinante de los r vectores $f(\boldsymbol{a}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj})$, con $1 \leqslant j \leqslant r$, en la base canónica de $\mathbb{R}^r$ es precisamente el determinante d de (33), que es no nulo, y por tanto (cf. teorema 2, p. 444) estos vectores son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^r$. En consecuencia, los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_r$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, y en conclusión la matriz A tiene rango mayor o igual que r.

Por otro lado, supongamos que rango $A > r$, es decir, que A tiene al menos $r + 1$ vectores columna linealmente independientes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los $r + 1$ primeros vectores columna de A: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{r+1}$, son linealmente independientes, sin más que basarnos en que $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ ya lo son, y en el teorema de la base incompleta.

El sistema de vectores $((a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2}), \dots, (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{rr}))$ es base de $\mathbb{R}^r$; sean β_1, β_2, ..., β_r las coordenadas del vector $(a_{1(r+1)}, a_{2(r+1)}, \dots, a_{r(r+1)})$ en esta base, y por tanto:

$$a_{i(r+1)} = \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_{ij}, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{34}$$

Ahora bien, como estamos suponiendo que $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ son linealmente independientes, debe existir k, con $r+1 \leqslant k \leqslant n$, tal que:

$$a_{k(r+1)} \neq \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_{kj}. \tag{35}$$

Pero lo escrito en (35) es absurdo. En efecto. De las propiedades del determinante de una matriz (cf. p. 446), de (34) y de la proposición II.4 (cf. p. 449) se deduce:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1(r+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r(r+1)} \\ a_{k1} & \ldots & a_{kr} & a_{k(r+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & 0 \\ a_{k1} & \ldots & a_{kr} & a_{k(r+1)} - \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_{kj} \end{vmatrix} = \left(a_{k(r+1)} - \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_{kj} \right) d,$$

y como $d \neq 0$ (cf. (33)), de (35) podríamos concluir que A tiene una submatriz cuadrada de orden $r+1$ cuyo determinante es no nulo, en contra de la hipótesis (b).

En conclusión, el rango de A es igual a r. C.Q.D.

Podemos, pues, decir: *el rango de una matriz (cuando este rango es mayor que cero) es el mayor de los órdenes de sus submatrices cuadradas de determinante no nulo.*

EJEMPLO 12 Calculemos el rango de la matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sumando a la cuarta columna las columnas primera y tercera multiplicadas por -1, obtenemos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es el mismo que el de la matriz A; y sumando a la tercera columna de B sus dos primeras columnas multiplicadas por -1, obtenemos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $\operatorname{rango}(C) = \operatorname{rango}(A)$. Ahora bien, la matriz C tiene una submatriz cuadrada de orden 2 de determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

y todas sus submatrices cuadradas de orden 3 tienen determinante nulo (pues presentan al menos una columna de términos nulos), luego: $\operatorname{rango}(C) = 2$. En conclusión: $\operatorname{rango}(A) = 2$.

B.9 SISTEMAS DE CRAMER

Sistema de Cramer

Se denomina **sistema de Cramer** a todo sistema real de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuya matriz asociada es de rango n. Es decir, un sistema, de matriz asociada la matriz cuadrada A, es de Cramer precisamente si A es invertible, o equivalentemente (cf. proposición II.5, p. 453): $\det(A) \neq 0$.

EJEMPLO 13 El sistema real:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 = 2 \end{cases}$$

es de Cramer, pues es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, y su matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene rango igual a 2. Se verifica:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n, \end{cases} \tag{36}$$

que podemos también expresar de la forma: $AX = C$, donde X y C son las matrices columna de orden $(n, 1)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

y A es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $\boldsymbol{a}_j$ el j-ésimo vector columna de la matriz A:

$$\boldsymbol{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), \quad \text{con } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

y por $\boldsymbol{c}$ el vector cuyas componentes son los términos de la matriz C:

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

resolver el sistema (36) equivale a determinar coeficientes reales $x_1, x_2, \dots, x_n$ que permitan expresar el vector $\boldsymbol{c}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$: $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$.

Supongamos que el sistema (36) es de Cramer, es decir: rango $A = n$, o equivalentemente: $\det(A) = \Delta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \neq 0$. El sistema (36) tiene, pues, una única solución:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

De las propiedades del determinante de n vectores en una base (cf. p. 442) se deduce:

$$\begin{aligned} x_1 \Delta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) &= \Delta(x_1\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \Delta(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \Delta(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n), \end{aligned}$$

y por tanto:

$$x_1 = \frac{\Delta(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)}{\det(A)}.$$

Análogamente probaríamos:

$$x_i = \frac{\Delta(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n)}{\det(A)}, \quad \text{con } 2 \leqslant i \leqslant n.$$

En conclusión, hemos probado el siguiente resultado:

Regla de Cramer

Proposición II.8 *Si el sistema (36), de n ecuaciones con n incógnitas, verifica:* $\det(A) \neq 0$, *entonces tiene una única solución:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

tal que:

$$x_i = \frac{\Delta(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n)}{\det(A)}, \quad \text{con } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

EJEMPLO 14 Si el sistema real de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$$

es de CRAMER, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces su única solución: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, de acuerdo con la regla de CRAMER verifica:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

El lector puede comprobar que el sistema de ecuaciones del ejemplo 13 (cf. p. 457), que es de CRAMER, tiene por solución única:

$$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 15 Sea A la matriz del ejemplo 11 (cf. p. 454) con $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

de determinante $\det(A) = 4(2-1) = 4$, y sean X y C las matrices columna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema real $AX = C$, de tres ecuaciones con tres incógnitas, es de CRAMER, pues $\det(A) \neq 0$; y su única solución es la matriz columna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

tal que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & 1 & 2 \\ c_2 & 1 & -2 \\ c_3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4c_1 + 4c_2 - 4c_3}{4}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & c_1 & 2 \\ 0 & c_2 & -2 \\ 1 & c_3 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2c_1 - 2c_2 + 4c_3}{4},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 1 & 2 & c_3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-c_1 - 3c_2 + 2c_3}{4}.$$

B.10 SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 (p. 438) Un método para escribir una permutación $g \in P_n$ ($n \geqslant 2$) como composición de transposiciones es el siguiente.

Si $g = u_n$, entonces (cf. consecuencias de la definición de transposición, p. 437) $g = t_{ij} \circ t_{ij}$ para cualquier transposición $t_{ij} \in P_n$.

Si por el contrario $g \neq u_n$, sea i el menor elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $g(i) \neq i$. Entonces la permutación $g_1 = t_{ig(i)} \circ g$ verifica:

$$g = t_{ig(i)} \circ g_1 \quad \text{y} \quad \forall\, k \leqslant i,\ g_1(k) = k.$$

Si $g_1 \neq u_n$, llevamos a cabo el mismo proceso con g_1, y lo repetimos sucesivamente con las permutaciones que vamos obteniendo hasta llegar a u_n (a lo más en $n - i$ pasos). Finalmente, tendremos expresada g como composición de transposiciones.

Debe observarse que no es única la forma de escribir una permutación como composición de transposiciones.

Ejercicio 2 (p. 441) El caso $n = 2$ es obvio. Si $n \geqslant 3$, existen k transposiciones $t_{i_1j_1}, t_{i_2j_2}, \ldots, t_{i_kj_k}$ de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tales que: $g' = t_{i_1j_1} \circ t_{i_2j_2} \circ \cdots \circ t_{i_kj_k}$ Ahora bien, si consideramos las transposiciones $t_{i_1j_1}, t_{i_2j_2}, \ldots, t_{i_kj_k}$ como elementos de P_n, entonces:

$$g = t_{i_1j_1} \circ t_{i_2j_2} \circ \cdots \circ t_{i_kj_k},$$

pues $g(n) = n$, y por tanto: $\varepsilon(g) = \varepsilon(g')$.

ÍNDICE ANALÍTICO

Notaciones

ISBN 978-84-92948-29-1
9 788492 948291

UNED